

ROZDZIELCZOŚĆ A NIEPEWNOŚĆ WYNIKU POMIARU

Albin Czubla
Główny Urząd Miar

1. Wprowadzenie

W prawidłowo konstruowanych cyfrowych przyrządach pomiarowych rozdzielczość wyświetlanego lub odczytanego wyniku pomiaru, poprzez interfejs wyjściowy, powinna być adekwatna do wymaganego zastosowania przyrządu i jego możliwości pomiarowych, czy zastosowanej metody pomiaru. Konsekwencją zwykle szerokiego zakresu pomiarowego jest różne i zmienne znaczenie rozdzielczości wyniku pomiaru, w zależności od wartości i stabilności wielkości mierzonej. Odmienny też może być sens rozdzielczości w zależności od tego, czy jesteśmy końcowym użytkownikiem przyrządu pomiarowego, czy też podlega on właśnie wzorcowaniu. W konsekwencji, przy szacowaniu niepewności wyniku pomiaru, nie tylko nie można automatycznie zaniedbywać wpływu rozdzielczości, ani też automatycznie uwzględniać wpływu rozdzielczości bez zróżnicowania na sytuację pomiarową, ale należy świadomie interpretować jej wpływ na wynik końcowy, zależnie od sposobu realizacji pomiaru, sposobu uzyskania aktualnego wskazania, czy faktycznych właściwości i konstrukcji przyrządu pomiarowego.

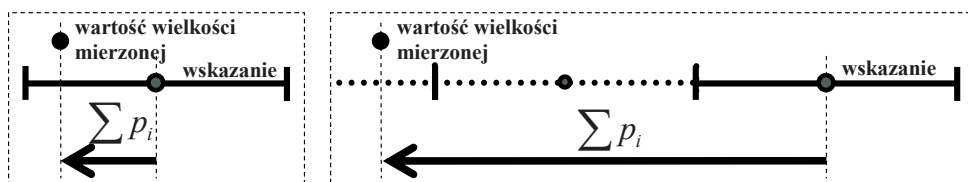
Przykładowo czym innym jest pomiar przedziału czasu za pomocą czasomierza o rozdzielczości 1 minuty, a czym innym jest odmierzenie za pomocą tego samego czasomierza przedziału czasu równego 1 minucie, czy całkowitej liczbie minut. Dziedzina czasu i częstotliwości dostarcza wielu przykładów w tym zakresie, a ponieważ czas i częstotliwość należą obecnie do najdokładniej odtwarzanych i mierzonych wielkości fizycznych oraz istnieje duża różnorodność przyrządów pomiarowych w tej dziedzinie, łatwo jest skonfrontować rozważania teoretyczne z praktyką, aczkolwiek prezentowane w niniejszym rozdziale rozważania mają charakter ogólny i niezależny od dziedziny pomiarowej.

Podstawowym celem tej pracy jest przedstawienie i zrewidowanie podejścia do pojęcia rozdzielczości w kontekście licznych sytuacji praktycznych [1], w odróżnieniu od publikowanych w ostatnich latach, głównie w czasopiśmie *Metrologia*, prac dotyczących tej tematyki, które koncentrują się na aspekcie czysto modelowym oszacowania niepewności wyniku pomiaru z istotnym udziałem rozdzielczości [2 ÷ 6].

2. Zarys problemu

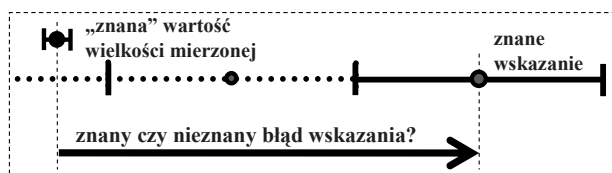
W typowej sytuacji pomiarowej, gdy nie jest znana wartość wielkości mierzonej, interpretacja rozdzielczości wskazania intuicyjnie nie nastręcza trudności, gdyż rozdzielczość odpowiada zwykłemu zaokrągleniu wskazania przez przyrząd pomia-

rowy, natomiast konieczność uwzględniania rozdzielczości wskazania w niepewności wyniku pomiaru jest konsekwencją braku informacji, o ile zostało zmienione wskazanie przez zaokrąglanie. Pewien problem może jednak stanowić już świadome rozróżnienie poprawki na rozdzielczość wśród innych poprawek korygujących wskazanie do wartości umownie prawdziwej wielkości mierzonej (rys. 1). Podobnie problem pojawia się też w sytuacji, gdy odczytane wskazanie ma być skorygowane dodatkowo o poprawkę wyznaczoną na podstawie świadectwa wzorcowania. Zwykle w niepewności takiej poprawki już raz jest uwzględniona rozdzielczość wskazania, stąd może rodzić się wątpliwość, czy ponowne uwzględnianie rozdzielczości wskazania w niepewności końcowego wyniku pomiaru jest zasadne.



Rys. 1. Różne sytuacje pomiarowe ilustrujące problem rozróżnienia poprawki na rozdzielczość wśród innych poprawek (odcinek z pionowym kreskami po obu końcach stanowi ilustrację graficzną rozdzielczości wskazania, $\sum p_i$ – suma poprawek korygujących wskazanie do wartości wielkości mierzonej, w tym jedna z poprawek p_i jest poprawką na rozdzielczość wskazania)

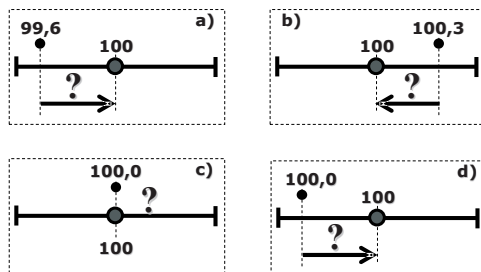
Z kolei odmienna jest sytuacja pomiarowa występująca podczas wzorcowania przyrządu pomiarowego, który nie jest źródłem wielkości mierzonej, gdy wyznaczany jest błąd wskazania. Wtedy najczęściej znana jest (zwykle z niepewnością co najmniej kilkakrotnie mniejszą niż wartość niepewności wnoszonej przez wzorcowany przyrząd pomiarowy) wartość wielkości mierzonej i jednocześnie znane jest wskazanie przyrządu, który jest wzorcowany (rys. 2). Wartość błędu wskazania uzyskana przez odjęcie od wskazania przyrządu pomiarowego wartości wielkości mierzonej jest różnicą dwu znanych wartości. Zatem rodzi się wątpliwość, czy zasadne jest tu uwzględnianie rozdzielczości wskazania w niepewności wyniku pomiaru. Aby rozwiązać tego typu wątpliwości, kluczowe jest, w rozumieniu udziału rozdzielczości w niepewności wyniku pomiaru, prawidłowe rozumienie pojęcia błędu wskazania oraz poprawki na rozdzielczość.



Rys. 2. Ilustracja problemu znajomości wartości błędu wskazania przy pomiarze podczas wzorcowania (strzałka/wektor ze znakiem zapytania ilustruje graficznie wstępnie przypisywaną wartość błędu wskazania, pozostałe oznaczenia i symbolika elementów zgodnie z opisem na rys. 1)

3. Błąd wskazania a rozdzielczość

Ogólnie przyjętą, zgodnie z Międzynarodowym słownikiem podstawowych i ogólnych terminów metrologii [7] oraz międzynarodowymi dokumentami ujednolicającymi podejście do szacowania niepewności wyniku pomiaru [8, 9], definicją błędu wskazania przyrządu pomiarowego jest różnica między wskazaniem przyrządu pomiarowego a wartością (umownie) prawdziwą wielkości mierzonej. Na rys. 3 przedstawiono różne sytuacje pomiarowe z ustalonym wskazaniem przyrządu równym 100, przy założeniu, że wartość wielkości mierzonej znana jest dokładnie.



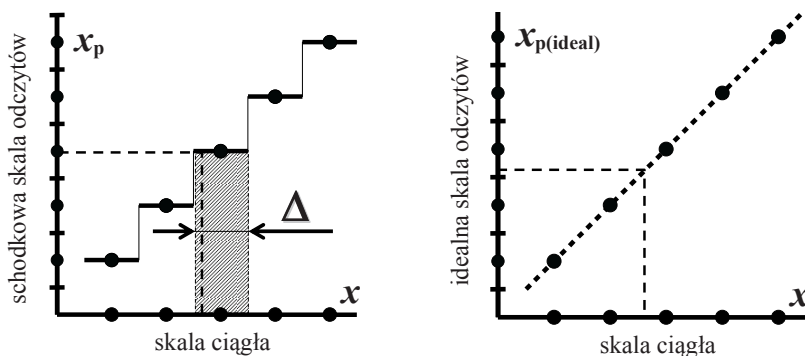
Rys. 3. Ilustracja do weryfikacji interpretacji pojęcia błędu wskazania (strzałka/wektor ze znakiem zapytania ilustruje graficznie wstępnie przypisywane wartości błędu wskazania, pozostałe oznaczenia i symbolika elementów zgodnie z opisem na rys. 1)

Przypadki a), b) i c) na rys. 3 różnią się tylko wartością wielkości mierzonej i można przyjąć, że obserwowana różnica pomiędzy wskazaniem przyrządu a wartością (umownie) prawdziwą wielkości mierzonej jest głównie wynikiem zaokrąglania wskazania. Przyjęcie założenia, że w tych trzech przypadkach obserwowane są trzy różne wartości błędu wskazania, prowadziłoby do niezgodnego z teorią szacowania niepewności wyniku pomiaru wniosku, że przy identycznym wskazaniu błąd wskazania ma zmienną wartość w zależności od aktualnej wartości wielkości mierzonej. Ponadto pozornie pojawia się niejednoznaczność w interpretacji wartości błędu wskazania pomiędzy przypadkami c) i d) na rys. 3, gdzie w przypadku d) występuje dodatkowe przesunięcie skali wielkości mierzonej w stosunku do skali wielkości odtwarzanej przez przyrząd pomiarowy.

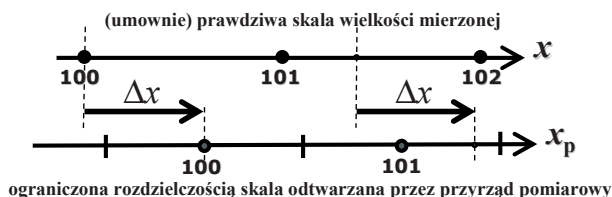
Wszystkie powyższe wątpliwości znikają, jeśli w definicji błędu wskazania jako wskazanie przyrządu pomiarowego będzie rozumiane „idealne” wskazanie $x_{p(\text{ideal})}$ (nieograniczone rozdzielczością i konstrukcją przyrządu pomiarowego), które byłoby wskazywane przez przyrząd pomiarowy, gdyby wskazanie można było odczytać dokładnie, z nieograniczoną liczbą miejsc znaczących (rys. 4). Błąd wskazania Δx odpowiada wtedy jednoznacznie lokalnemu przesunięciu skali odtwarzanej przez przyrząd pomiarowy względem skali wielkości mierzonej i lokalnie ma wartość stałą równą (rys. 5):

$$\Delta x = x_{p(\text{ideal})} - x \quad (1)$$

gdzie x jest wartością (umownie) prawdziwą wielkości mierzonej.



Rys. 4. Ilustracja ciągłej skali wielkości mierzonej x oraz schodkowej x_p i idealnej $x_{p(ideal)}$ skali odczytów wskazania przyrządu pomiarowego



Rys. 5. Ilustracja graficzna błędu wskazania

Istnienie poprawki na rozdzielczość p_Δ uzasadnione jest zatem nieznaną różnicą pomiędzy „idealnym” wskazaniem przyrządu pomiarowego $x_{p(ideal)}$ nieograniczonym rozdzielczością, a faktycznie odczytanym wskazaniem x_p przyrządu:

$$p_\Delta = x_{p(ideal)} - x_p \quad (2)$$

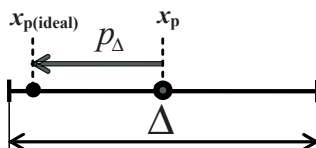
W każdym jednostkowym pomiarze, czy również w konkretnej serii pomiarów, przy założeniu odpowiednio stabilnej wartości wielkości mierzonej i stabilnym działaniu przyrządu pomiarowego, różnica wyrażona wzorem (2) ma charakter systematyczny (ma określoną wartość i znak) i poprawka na rozdzielczość w istocie koryguje, związaną z uzyskaniem konkretnego wskazania, część stałego przesunięcia wyniku pomiaru. Stąd, w rozumieniu Przewodnika [8] i Dokumentu EA-4/02 [9], uzasadnione pozostaje nazywanie tej różnicy poprawką, chociaż wiedza na jej temat ogranicza się zwykle do znajomości jej granic.

Z poprawką na rozdzielczość wiąże się w konsekwencji zmienną losową centrowaną o zerowej wartości oczekiwanej i prostokątnym rozkładzie prawdopodobieństwa, co jest ściśle prawdą tylko w przypadku zachowania symetrii wskazań sąsiadujących z bieżącym wskazaniem. Przy braku symetrii obszarów wskazań „idealnych” względem obserwowanego wskazania, zmiennej losowej związanej z poprawką na rozdzielczość można przypisać niezerową wartość oczekiwaną.

Za niepewność standardową $u(p_\Delta)$ poprawki na rozdzielczość przyjmuje się:

$$u(p_\Delta) = \frac{\Delta}{2\sqrt{3}} \quad (3)$$

gdzie Δ jest szerokością przedziału obejmującego wszystkie, nieograniczone rozdzielczością teoretycznie możliwe, „idealne” wskazania przyrządu, przy którym obserwowane jest dane wskazanie x_p .



Rys. 6. Ilustracja graficzna poprawki na rozdzielczość

Wzór na wartość błędu wskazania Δx z uwzględnieniem poprawki na rozdzielczość p_Δ przyjmuje postać:

$$\Delta x = x_{p(\text{ideal})} - x = x_p - x + p_\Delta \quad (4)$$

Należy zwrócić uwagę, że równorzędną ze wzorem (3) postać zależności na niepewność standardową mogą mieć również inne poprawki, którym przypisuje się prostokątny rozkład prawdopodobieństwa, ale nie są interpretowane jako poprawka na rozdzielczość. Przykładowo mogą to być poprawki związane z błędem granicznym, niestabilnością, efektami starzenia się, dryftem.

4. Rozdzielczość a parametr Δ

Zwykle wartość parametru Δ (wzór (3) i rys. 6) utożsamia się z rozdzielczością przyrządu pomiarowego, tzn. z najmniejszą obserwowalną różnicą pomiędzy bieżącym wskazaniem, a kolejnym możliwym innym wskazaniem tego przyrządu. Najczęściej przyjmuje się jego wartość równą jedności, na pozycji najmniej znaczącej cyfry odczytywanego wyniku pomiaru Δ_1 . Jednak w praktyce nie zawsze zachowana jest symetria położenia sąsiadujących wskazań względem bieżącego wskazania. Sytuacja taka występuje często przy wskazaniach granicznych w ramach sąsiadujących podzakresów pomiarowych, gdzie następuje skokowa zmiana rozdzielczości wyświetlanego wyniku pomiaru (zwykle o jedną dekadę) ze względu na ograniczoną liczbę cyfr. Przykładowo przy pomiarze przedziału czasu czasomierzem z 4-cyfrowym wyświetlaczem, sąsiadują ze sobą następujące wskazania: 999,8 ms, 999,9 ms, 1,000 s i 1,001 s, gdzie obserwowane wskazanie 999,9 ms odpowiada teoretycznie wskazaniom nieograniczonym rozdzielczością z zakresu od 999,85 ms do 999,95 ms, natomiast obserwowane wskazanie 1,000 s odpowiada teoretycznie wskazaniom nieograniczonym rozdzielczością z zakresu od 999,95 ms do 1000,50 ms.

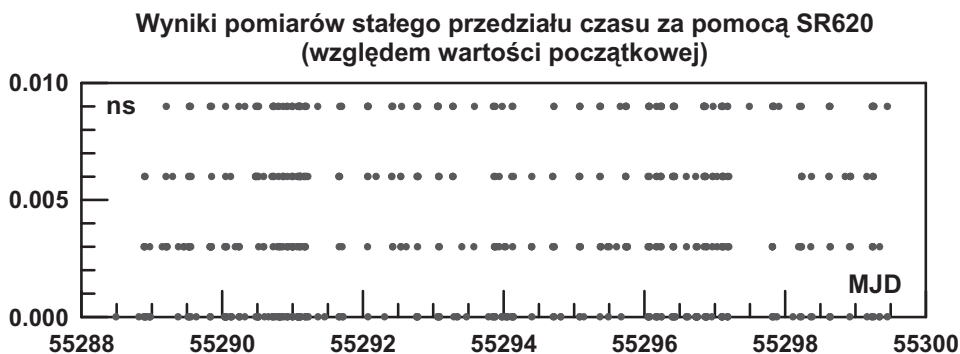
Podobnie, asymetrię kolejnych możliwych wskazań obserwuje się w przypadku nieliniowej zależności wartości wyniku pomiaru od wartości wielkości mierzonej

w pomiarze pośrednim. Przykładowo w prędkościomierzach, które (na podstawie wprowadzonej do prędkościomierza, jako stały parametr wartości drogi) przeliczają wynik pomiaru czasu przejazdu na wartość prędkości wyświetlanej w km/h; czy w chronokomparatorach w analogowym trybie pracy, gdzie następuje zamiana wartości kąta obrotu tarczy na wartość tangensa kąta i na tej podstawie jest wyliczany dobowy przyrost błędu wskazania wyświetlany w s/d.

W przypadku asymetrii kolejnych wskazań, zwykle stosowanym rozwiązaniem jest przyjmowanie za bieżącą wartość rozdzielczości Δ wartości większej z modułów (wartości bezwzględnych) dwu różnic pomiędzy bieżącym wskazaniem a wskazaniami sąsiadującymi. Prowadzi to lokalnie do zawyżania niepewności wyniku pomiaru. Natomiast najbardziej właściwe, z teoretycznego punktu widzenia, przyjęcie w tego typu sytuacjach niezerowej wartości estymaty poprawki na rozdzielczość równej wartości przesunięcia środka symetrii obszaru wskazań „idealnych” względem obserwowanego wskazania, czy przyjęcie za wartość rozdzielczości Δ szerokości tego obszaru, jest raczej niepraktykowane.

Inny problem stanowi automatyczne przyjmowanie za wartość parametru Δ wartości Δ_1 , czyli wartość równą jedności na pozycji najmniej znaczącej cyfry odczytywanego wyniku pomiaru, gdyż można w ten sposób znacząco niedoszacować niepewność wyniku pomiaru, zwłaszcza, gdy rozdzielczość wskazania ma istotny wpływ na niepewność wyniku końcowego. W przypadkach, gdy w serii pomiarów uzyskujemy powtarzalnie identyczne wskazania, obserwujemy wahania wskazania pomiędzy dwiema wartościami różniącymi się od siebie o wartość przekraczającą Δ_1 , czy obserwujemy brak zmiany wskazania przy zmianie wartości wielkości mierzonej przekraczającej wartość Δ_1 . Faktyczna rozdzielczość wskazania wyniku pomiaru powinna być zawsze weryfikowana w oparciu o dokumentację techniczną przyrządu pomiarowego oraz potwierdzona obserwacjami, jeśli jest to możliwe.

W praktyce pomiarowej w Laboratorium Czasu i Częstotliwości GUM stwierdzono przypadek przyrządu pomiarowego, w którym kolejne najbliższe możliwe

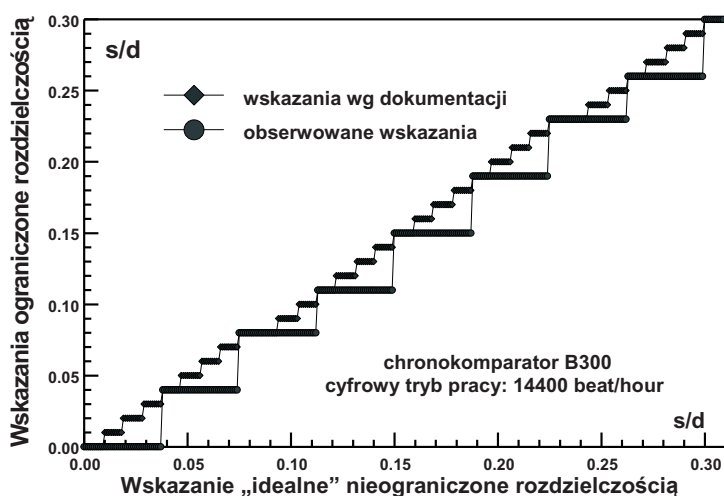


Rys. 7. Przykładowe wyniki pomiarów przedziału czasu za pomocą częstościomierza-czasomierza SR620 (wyniki przeliczone względem wartości początkowej, MJD (*Modified Julian Date*) – zmodyfikowany dzień juliański)

wskazanie było odległe od odczytanego wyniku pomiaru aż o $\Delta = 95367 \cdot \Delta_1$, o czym nie było wzmianki w dokumentacji technicznej. W prawidłowo skonstruowanym przyrządzie pomiarowym nie powinno mieć to miejsca. Natomiast typowe jest, że wskazanie przyrządu pomiarowego może zmieniać się o niewielką ustaloną wielokrotność jednostki najmniejszej cyfry znaczącej, np. $2 \cdot \Delta_1$ lub $5 \cdot \Delta_1$.

Faktyczną rozdzielczość można często wydedukować na podstawie obserwacji serii wyników pomiarów. W sytuacji przedstawionej na rys. 7 wynik pomiaru wyświetlany jest z rozdzielczością do 1 ps, ale już wyświetlane wartości zmieniają się skokowo co 3 ps i 2 ps, natomiast w dokumentacji technicznej podana jest informacja o deklarowanej rozdzielczości 4 ps [10] uzyskiwania liczbowego wyniku pomiaru przedziału czasu – nie ma to większego znaczenia w praktyce, ze względu na pozostałe składowe niepewności wnoszone przez ten przyrząd pomiarowy.

Z kolei, w sytuacji zilustrowanej na rys. 8, w dokumentacji technicznej przyrządu nie umieszczono informacji, że przy wartościach parametru „liczba uderzeń na godzinę” większych od 3600 beat/h w przybliżeniu proporcjonalnie pogarsza się rozdzielczość wyświetlanego wskazania – ma to istotne znaczenie w praktyce, gdyż rozdzielczość wskazania jest w tym przypadku głównym źródłem niepewności wyniku pomiaru [11, 12].



Rys. 8. Ilustracja rozbieżności pomiędzy informacją o rozdzielczości wyniku pomiaru podaną w dokumentacji technicznej chronokomparatora cyfrowo-analogowego typu B300 w cyfrowym trybie pracy (deklarowana jako 0,01 s/d niezależnie od pozostałych parametrów pracy), a faktycznie obserwowanymi możliwymi wskazaniami (przy wartości parametru pracy: 14400 beat/h, wskazanie zmienia się co 0,04 s/d i 0,03 s/d)

Problematiczne jest również ocenianie wartości rozdzielczości wskazania Δ w sytuacji, gdy obserwujemy szybkie zmiany wskazania w obrębie kilku wartości, migotanie wskazania w obrębie dwu wartości, czy płynne zmiany wskazania w niewielkim zakresie. Za rozdzielczość Δ , ustalaną indywidualnie w każdym pomiarze,

należy wówczas przyjąć obserwowany zakres zmian wskazania poszerzony o wartości różnicy pomiędzy skrajnymi wartościami obserwowanych wskazań i sąsiadującymi z nimi wartościami wskazań, czyli:

$$\Delta = x_{p(\max)} - x_{p(\min)} + k \cdot \Delta_1 \quad (5)$$

gdzie $x_{p(\max)}$ i $x_{p(\min)}$ – odpowiednio wartość maksymalna i minimalna obserwowanych wskazań, a $k \cdot \Delta_1$ – wartość rozdzielczości, jaka byłaby przyjęta przy braku zmian wskazania lub z jaką określono granice zakresu zmian wskazań.

Przykładowo, przy obserwacji wahań wskazania w obrębie wartości $\{10\Delta_1, 11\Delta_1, 12\Delta_1\}$, za rozdzielczość Δ należy przyjąć $(12-10+1)\Delta_1 = 3\Delta_1$, natomiast przy obserwacji wahań w obrębie wartości $\{10\Delta_1, 12\Delta_1\}$, za rozdzielczość Δ należy przyjąć $(12-10+2)\Delta_1 = 4\Delta_1$.

Powyższe sytuacje pomiarowe odnoszą się głównie do przyrządu, który mierzy wartość danej wielkości. W przypadku przyrządu pomiarowego stanowiącego źródło wielkości mierzonej (rezystor wzorcowy, generator częstotliwości, kalibrator) o ustalonych lub regulowanych wartościach nominalnych sytuacja jest nieco odmienna. Oczywiście jest, że przy ustalonej lub powtarzalnej cyfrowej nastawie wartości nominalnej odtwarzanej wielkości, rozdzielczość zadawania kolejnych wartości nominalnych nie powinna być uwzględniana w niepewności wyniku pomiaru, ponieważ tego typu przyrząd odtwarza dyskretną (punktową) skalę wielkości mierzonej, tzn. obserwowane wartości nominalne wskazań nie są ograniczone rozdzielczością (są dokładne i nie różnią się od „idealnych” wartości nominalnych). Powoduje to, że poprawka na rozdzielczość, rozumiana jako nieznana różnica pomiędzy wartością „idealną” wskazania nieograniczonego rozdzielczością a obserwowanym wskazaniem, traci w tym wypadku sens.

Jasność powyższego obrazu zakłóca jednak fakt występowania wewnętrznych błędów syntezy cyfrowej (DDS – *Direct Digital Synthesis*) zależnych od nastawionej wartości nominalnej odtwarzanej wielkości, a ściślej mówiąc od relacji arytmetycznych zachodzących pomiędzy pojemnością cyfrową akumulatora fazy, pojemnością pamięci kształtu sygnału i, wynikającym z nastawionego wskazania, krokiem przyrostu akumulatora fazy. Stąd nastawiona wartość nominalna wskazania może być odtwarzana bezbłędnie (bez dodatkowych błędów syntezy) lub z dodatkowym błędem wynikającym z wewnętrznej rozdzielczości syntezy. Prawidłowe uwzględnienie wpływu wewnętrznej rozdzielczości syntezy na korektę nastawionej wartości nominalnej wskazania wymaga dokładnej znajomości sposobu zamiany wskazania na krok przyrostu akumulatora fazy i sposobu realizacji syntezy generowanego sygnału w przyrządzie lub, przy braku wiedzy na ten temat, konieczności pogorszenia oszacowania niepewności wyniku pomiaru. Przykładowo, w przypadku generatora częstotliwości typu 33250A [13], sygnały prostokątne o częstotliwościach $f_n = 2^x \cdot 5^y$ Hz dla całkowitych liczb $x = \{-6, -5, \dots, 9\}$ i $y = \{-4, -3, \dots, 8\}$ generowane są bezbłędnie, natomiast synteza sygnałów prostokątnych o innych częstotliwościach zawiera już błędy związane z wewnętrzną rozdzielczością syntezy.

Inaczej jest w przypadku takich przyrządów, gdzie nie jest możliwa powtarzalna nastawa wartości nominalnej odtwarzanej wielkości, nastawa jest zmienna czy

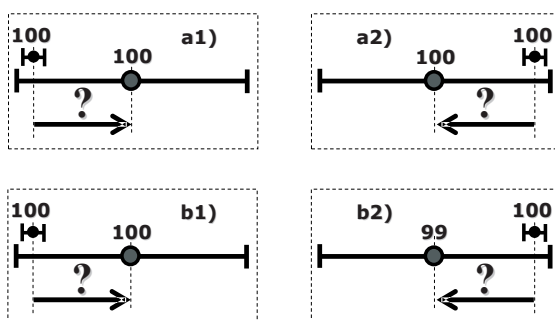
też nastawa zależy od wskazania pomocniczego układu pomiarowego. Przyrządy te, zwykle z analogową płynną nastawą lub z pomocniczym wyświetlaczem cyfrowym, odtwarzają skalę ciągłą (rozmytą) odtwarzanej wielkości. Istniejąca różnica pomiędzy faktycznie obserwowaną, ograniczoną rozdzielczością (w tym spowodowaną płynnością nastawy), wartością nominalną a „idealną” wartością nominalną, nieograniczoną rozdzielczością odtwarzanej wielkości, powoduje, że poprawka na rozdzielczość wskazania ma w tym wypadku sens. W rozdzielczości wskazania uwzględniana jest wtedy niestabilność nastawy wynikająca z płynności i niepowtarzalności nastawy, w tym będąca również efektem obserwacji zmian wyświetlanego wskazania informującego o aktualnej wartości nominalnej odtwarzanej wielkości, w trakcie odtwarzania tej wielkości. Wówczas należy odróżnić niestabilność nastawy, uwzględnianą w rozdzielczości, od niestabilności faktycznej odtwarzanej wartości wielkości mierzonej i od błędu, z jakim jest odtwarzana.

Ostatnie powyższe zachowanie jest typowe w przypadku niektórych generatorów bez stabilizacji kwarcowej, ale z wbudowanym w urządzenie pomocniczym częstotściomierzem kwarcowym wyświetlającym informację o wartości nominalnej aktualnie odtwarzanej częstotliwości, często zmieniającej się w sposób płynny.

5. Wzorcowanie a rozdzielczość

Biorąc pod uwagę konieczność odnoszenia błędu wskazania do wskazania „idealnego”, nieograniczonego rozdzielczością (wzory (1) i (4)), przy wyznaczaniu wartości błędów wskazania podczas wzorcowania przyrządu pomiarowego, który mierzy daną wielkość, nie ulega żadnym wątpliwości konieczność uwzględniania rozdzielczości wzorcowanego przyrządu pomiarowego w niepewności wyniku pomiaru. Dzięki temu można uzyskać wiarygodny wynik wzorcowania, niezależnie od zaistniałej podczas wzorcowania sytuacji pomiarowej (rys. 9).

Pewien wyjątek od podanej wyżej zasady może być wzorcowanie przyrządu pomiarowego, który mierzy daną wielkość i ma stabilne wskazania, poprzez wyzna-



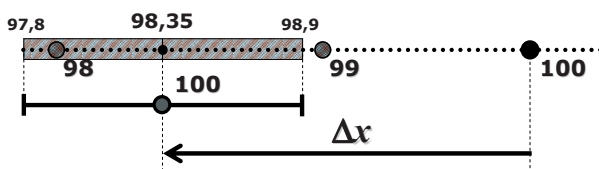
Rys. 9. Ilustracja problematyki wyznaczania błędu wskazania podczas wzorcowania (oznaczenia i symbolika elementów zgodna z rys. 2): a1) i a2) różne sytuacje pomiarowe prowadzące do identycznego zapisu wyniku wzorcowania, b1) i b2) zbliżone sytuacje pomiarowe prowadzące z kolei do różnych zapisów wyniku wzorcowania)

czenie zakresu wartości (umownie) prawdziwych wielkości mierzonej, przy których wskazanie wzorcowanego przyrządu nie ulega zmianie (rys. 10). Wówczas można przyjąć jako wyznaczoną wartość błędu wskazania różnicę pomiędzy obserwowanym wskazaniem przyrządu wzorcowanego a środkiem zakresu wartości wielkości mierzonej, przy których wskazanie to nie ulega zmianie, tzn.:

$$\Delta x = x_p - \frac{x_{k(\max)} + x_{k(\min)}}{2} \quad (6)$$

gdzie $x_{k(\max)}$ i $x_{k(\min)}$ – odpowiednio graniczna maksymalna i minimalna wartość kontrolnie zadawanej wielkości mierzonej, przy której obserwowane jest stałe wskazanie x_p . Wykorzystuje się tu fakt pokrywania się „idealnego” wskazania, nieograniczonego rozdzielczością, z obserwowanym wskazaniem dla tak wyznaczonego środka zakresu wartości wielkości mierzonej.

W tym przypadku przy szacowaniu niepewności błędu wskazania nie uwzględnia się rozdzielczości przyrządu wzorcowanego, ponieważ $x_{p(\text{ideal})} = x_p$. Natomiast uwzględnia się rozdzielczość, z jaką zadawano kolejne wartości wielkości mierzonej przy wyznaczaniu granic zakresu $x_{k(\max)}$ i $x_{k(\min)}$. Przy podawaniu tak uzyskanego wyniku pomiaru na świadectwie wzorcowania, w celu zagwarantowania czytelności i właściwego rozumienia wyniku pomiaru, powinna być zamieszczona również informacja o sposobie wyznaczenia wartości błędu wskazania.



Rys. 10. Ilustracja graficzna wzorcowania poprzez wyznaczenie zakresu wartości (umownie) prawdziwych wielkości mierzonej, przy których wskazanie wzorcowanego przyrządu nie ulega zmianie (oznaczenia i symbolika elementów zgodna z rys. 2)

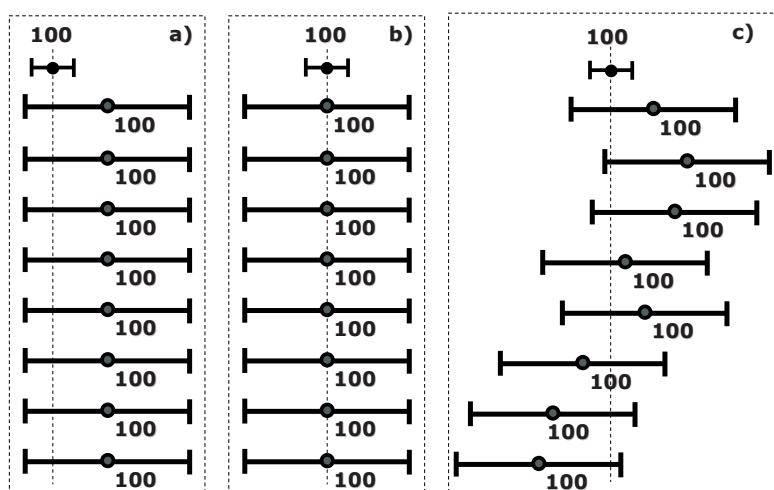
Przykładowo, w sytuacji przedstawionej na rys. 10, obserwuje się wskazanie równe 100 przy zadawaniu (umownie) prawdziwych wartości wielkości mierzonej w zakresie od 97,8 do 98,9. Stąd wyznaczona najlepsza wartość estymaty błędu wskazania wynosi 1,65. Natomiast, przy szacowaniu niepewności wyznaczenia tej wartości, uwzględnia się równanie pomiaru (6) oraz rozdzielczość wyznaczenia wartości granicznych 97,8 i 98,9, równą $\Delta = 0,1 \cdot \Delta_1$. Oznacza to, że przy dominującym udziale rozdzielczości w niepewności wyniku pomiaru, niepewność jest co najmniej 10-krotnie mniejsza niż przy typowym sposobie wzorcowania, co jest uzyskiwane kosztem większej złożoności pomiaru.

Wracając do podejścia typowego przy wzorcowaniu, poprzez pomiar ustalonej kontrolnej wartości wielkości mierzonej, sytuację może trochę skomplikować kwestia stabilności wskazania „idealnego” w danej serii pomiarów – przy założeniu, że wartość wielkości mierzonej nie ulega wahaniom. Przy wyznaczaniu wartości błędów

wskazania podczas wzorcowania, czy również w pomiarze po wzorcowaniu przyrządu pomiarowego mierzącego daną wielkość, nie do odróżnienia są przedstawione na rys. 11 sytuacje pomiarowe. Jednak, w zilustrowanym na rys. 11 przypadku c), gdzie występują dodatkowo wahania wskazania „idealnego” nieograniczonego rozdzielczością, mieszczące się w obrębie ustalonego wskazania ograniczonego rozdzielczością. Problem ustalenia wielkości udziału rozdzielczości w niepewności wyniku pomiaru nie istnieje, jeśli konsekwentnie i zawsze poprawkę na rozdzielczość będzie się traktować zgodnie z jej definicją (wzory (2) i (3)), tj. nigdy ze sztucznie zwiększoną niepewnością tej poprawki. Zawsze w razie potrzeby, zgodnie z wiedzą i doświadczeniem metrologa i w zależności od oceny konkretnej sytuacji pomiarowej, można wprowadzić dodatkową poprawkę na ewentualne obserwowalne lub nieobserwowalne możliwe wahania „idealnego” wskazania nieograniczonego rozdzielczością, albo obserwować stabilność wskazań przez nieco dłuższy okres niż krótka pojedyncza seria pomiarów.

Przykładowo, powyższa sytuacja może mieć miejsce podczas wykonywania pomiaru za pomocą chronokomparatora. Biorąc pod uwagę typową rozdzielczość chronokomparatora równą 0,01 s/d oraz niestabilność generatora wewnętrznej podstawy czasu podobnego rzędu co rozdzielczość, w konsekwencji przy wzorcowaniu chronokomparatorów, wyznaczana jest stabilność wskazań chronokomparatora przez okres kilku godzin i nawet przy braku jakichkolwiek zmian wskazania chronokomparatora, przy pomiarze tej samej wartości punktu kontrolnego, podawana jest na świadectwie wzorcowania informacja o zaobserwowanym zakresie zmian wskazania.

Przy wzorcowaniu przyrządu pomiarowego stanowiącego źródło wielkości mierzonej, gdzie wyznaczana jest wartość poprawna wielkości mierzonej czy odpowied-

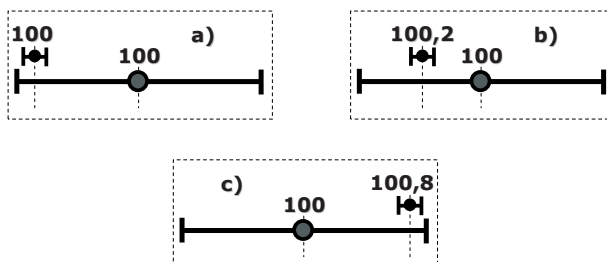


Rys. 11. Ilustracja stabilnych (a) i b)) oraz niestabilnych (c)) „idealnych” wskazań nieograniczonych rozdzielczością przyrządu pomiarowego w danej serii pomiarów (oznaczenia i symbolika elementów zgodna z rys. 2)

nio zdefiniowany błąd odtwarzania danej wartości, rozdzielczość wskazania wartości nominalnej uwzględnia się w niepewności wyniku pomiaru tylko wtedy, gdy nie jest możliwa powtarzalna nastawa wartości nominalnej odtwarzanej wielkości, nastawa jest zmienna, czy nastawa zależy od wskazania pomocniczego układu pomiarowego – zgodnie z uwagami zawartymi w poprzednim podrozdziale.

6. Rozdzielczość i pomiar po wzorcowaniu

Pomiary wykonywane w trakcie wzorcowania i po wzorcowaniu są pomiarami niezależnymi, ponieważ to samo wskazanie ograniczone rozdzielczością może odpowiadać różnym wskazaniom „idealnym” nieograniczonym rozdzielczością przyrządu pomiarowego (rys. 12). Konsekwentnie implikuje to każdorazowo konieczność uwzględniania rozdzielczości w niepewności wyniku pomiaru wykonywanego po wzorcowaniu (przyrządem, który mierzy), choć już zwykle wcześniej rozdzielczość została co najmniej raz uwzględniona, przy wyznaczaniu błędu wskazania podczas wzorcowania i jest zawarta w niepewności odpowiedniej poprawki, określonej na podstawie świadectwa wzorcowania.



Rys. 12. Przykładowe wartości (umownie) prawdziwe wielkości mierzonej i obserwowane ograniczone rozdzielczością wskazanie przyrządu pomiarowego:
a) pomiar podczas wzorcowania, b) i c) pomiar po wzorcowaniu
(oznaczenia i symbolika elementów zgodna z rys. 2)

7. Współczesne rodzaje rozdzielczości

We współcześnie konstruowanych przyrządach pomiarowych, ze względu na sposób uzyskiwania odczytywanego wskazania wartości wielkości mierzonej przy jednoczesnym zachowaniu definicji poprawki na rozdzielczość zgodnej ze wzorem (2), rozdzielczość przyrządu powinna być rozumiana nieco szerzej. Można przyjąć, że różnica, pomiędzy „idealnym” wskazaniem nieograniczonym rozdzielczością a faktycznie obserwowanym wskazaniem, jest efektem szeroko rozumianej kwantyzacji wyniku pomiaru, w tym również celowo lub przypadkowo wprowadzonego dodatkowo przez wewnętrzne układy pomiarowe zakłócenia o statystycznie znanym charakterze i zakresie. Stąd „idealne” wskazanie nieograniczone rozdzielczością może różnić się od odpowiadającego mu obserwowanego wskazania o wartość przekra-

czającą wielokrotnie najmniejszą cyfrę znaczącą wyświetlanego wyniku pomiaru, chociaż możliwe są również inne wskazania tylko nieznacznie różniące się od obserwowanego wskazania.

W powyższym kontekście pod pojęciem rozdzielczości należy rozumieć najmniejszą możliwą statystycznie istotną różnicę pomiędzy obserwowanym wskazaniem a kolejnym (statystycznie nowym) wskazaniem [10]. W takim lub podobnym ujęciu statystycznym pojęcie rozdzielczości pojawia się obecnie często w publikacjach i dokumentacji technicznej przyrządów pomiarowych jako wyznacznik precyzji pomiaru [10, 14, 15].

W konsekwencji, we wzorze (2) należałoby uwzględnić właściwie sumę trzech poprawek, mianowicie poprawkę p_{Δ} – związaną z odczytem wskazania i sąsiadującymi najbliższymi kolejnymi możliwymi wskazaniem w dotychczasowym rozumieniu oraz wynikające statystycznie z procesu kwantyzacji wyniku pomiaru poprawki: $p_{q(rms)}$ – związaną z wpływem o charakterze przypadkowym i $p_{q(syst)}$ – związaną z wpływem o charakterze systematycznym, tj.:

$$x_{p(ideal)} - x_p = p_{\Delta} + p_{q(rms)} + p_{q(syst)} \quad (7)$$

Poprawkom $p_{q(rms)}$ i $p_{q(syst)}$ przypisuje się zmienne losowe o zerowej wartości oczekiwanej. Udział czynników przypadkowych w procesie kwantyzacji wyniku pomiaru, związany z poprawką $p_{q(rms)}$, określany jest w dokumentacji technicznej za pomocą parametru nazywanego *Single shot resolution*, *Rms resolution* lub *Quantization error*, który odpowiada liczbowo odchyleniu standardowemu przypisywanemu normalnemu rozkładowi prawdopodobieństwa związanemu ze zmienną losową, odpowiadającą przypadkowym (szumowym) zmianom nieznaney różnicy pomiędzy „idealnym” (nieskwantyzowanym), a skwantyzowanym obserwowanym wskazaniem. W konsekwencji wpływ tego typu składowej rozdzielczości na wynik pomiaru podlega uśrednianiu i jej udział w niepewności wyniku pomiaru maleje wraz ze zwiększaniem liczebności serii, tj. zgodnie ze wzorem:

$$u(p_{q(rms)}) = \frac{Q_{res}}{\sqrt{n}} \quad (8)$$

gdzie: $u(p_{q(rms)})$ – niepewność standardowa przypisana poprawce związanej ze składową przypadkową kwantyzacji wyniku pomiaru, Q_{res} – parametr związany z szumem kwantyzacji wyniku pomiaru, n – liczba pomiarów w serii.

Z kolei udział czynników systematycznych w procesie kwantyzacji wyniku pomiaru, związany z poprawką $p_{q(syst)}$, nie podlega uśrednianiu ze względu na swój charakter, ale też jest zmienny w czasie i zależny od wartości wielkości mierzonej, stąd nie może być wyeliminowany poprzez pomiary różnicowe metodą podstawienia ani też poprzez uwzględnienie informacji uzyskanych podczas wzorcowania danego przyrządu. Udział ww. czynników systematycznych określany jest w dokumentacji technicznej jako *Differential non-linearity*, *Quantization error*. Z tego typu poprawką nie musi być też związany równomierny rozkład prawdopodobieństwa, gdyż wartości bliższe zeru mogą być bardziej prawdopodobne. W praktyce często ta składowa niepewności traktowana jest niezależnie od pojęcia rozdzielczości.

8. Podsumowanie

Przedstawione powyżej rozważania nie rozwiewają wszystkich wątpliwości dotyczących udziału rozdzielczości w niepewności wyniku pomiaru, natomiast zachęcają do unikania rutynowego, na rzecz świadomego, podejścia do rozdzielczości. Pozwoli to na lepsze rozumienie procesu pomiaru, ewentualną korektę budżetów niepewności i uzyskiwanie bardziej wiarygodnych wyników pomiarów. W praktyce może to mieć istotne znaczenie zarówno w przypadku mało dokładnych prostych przyrządów użytkowych, jaki i pomiarów na najwyższym poziomie dokładności.

Literatura

- [1] M. Lisowski: *Czynniki pomijane a wpływające na niepewność wzorcowania analogowych i cyfrowych przyrządów pomiarowych*, Podstawowe Problemy Metrologii – Prace Komisji Metrologii PAN, Seria: Konferencje Nr 11, s. 17-22, Katowice 2006.
- [2] I. Lira, W. Woeger: *The evaluation of standard uncertainty in presence of limited resolution of indicating devices*, Measurement Science and Technology 8 (1997), s. 441-443.
- [3] I. Lira: *Resolution revisited*, Metrologia 43 (2006), s. L14-L17.
- [4] G. Taraldsen: *Instrument resolution and measurement accuracy*, Metrologia 43 (2006), s. 539-544.
- [5] R. Willink: *On the uncertainty of the mean of digitized measurements*, Metrologia 44 (2007), s. 73-81.
- [6] J. Hannie, H. K. Iyer, C. M. Wang: *Fiducial approach to uncertainty assessment accounting for error due to instrument resolution*, Metrologia 44 (2007), s. 476-483.
- [7] *Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii*, International Organization for Standardization. Tłumaczenie: Główny Urząd Miar, Warszawa 1996.
- [8] *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*, International Organization for Standardization. Tłumaczenie: Główny Urząd Miar, Warszawa 1999.
- [9] *Wyrażanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu. Dokument EA-4/02*, European cooperation for Accreditation. Tłumaczenie Główny Urząd Miar, Warszawa 2001.
- [10] *Manual: SR620 Universal Time Interval Counter*, Stanford Research Systems, 1989, rev. 2.5 (4/2004).
- [11] *B 300 Manual. Operation B 300*, Greiner Vibrograf A.G.
- [12] A. Czubła, J. Stępniewski, Ł. Czerski: *Szacowanie niepewności wyniku pomiaru realizowanego za pomocą chronokomparatora cyfrowo-analogowego – teoria i praktyka*, Metrologia dziś i jutro, pod redakcją J. Jakubca, Z. Moronia, H. Juniewiczza, s. 185-194, Wrocław 2010.
- [13] *Manual: Agilent 33250A/80 MHz Function/Arbitrary Waveform Generator*, Agilent Technologies Inc., wyd. 2, 2003.
- [14] *Timer/Counter/Analyzer CNT-90 User's Manual*, Pendulum Instruments AB, 2004.
- [15] J. Kalisz: *Review of methods for time interval measurements with picosecond resolution*, Metrologia 41 (2004), s. 17-32.

METODA OBLICZANIA PRZEDZIAŁU I WSPÓŁCZYNNIKA ROZSZERZENIA PRZY OPRACOWANIU WYNIKU POMIARU

Paweł Fotowicz
Główny Urząd Miar

1. Wstęp

W na jno w sz yc h o pra c o w a n i a c h [1], po w st a ją c y c h p o d a u s j ro do w e go Bi ura Mi a r, p r e f e r o w a n a j e s t z a s a d a p r o p a g a c j i na p r z e d s t a w i a n i u w y n i k u p o m i a r u w p o s t a c i r o z k ł a d u p r a w z n a c z o n e g o n a p o d s t a w i e r o z k ł a d ó w w i e l k o ś c i w e j ś c i o w n y m o d e l p o m i a r u w i e l k o ś c i m i e r z o n e j. R e a l i z o w a ć j a m o ż n a M o n t e C a r l o . C e l e m t a k i e g o d z i a ł a n i a j e s t w y z n a c z e n i e p r z w i e l k o ś c i m i e r z o n e j.

P r z e d z i a ł r o z s z e r z e n i a z o s t a ł p r z y j ě t y j a k o m i a r a - n i e p e w n e j. P r z e d z i a ł t e n o b e j m u j e z n a c z a c ą c z ę ś ć z b i o r u m o ż l i w y c h m i e r z o n e j. O k r e ś l a o n s z e r o k o ś ć r o z k ł a d u w i e l k o ś c i m i e r z o n e j.

W c e l u u ł a t w i e n i a o b l i c z e ĩ p r z e d z i a ł u r o z s z e r z e n i a z o s a n a l i t y c z n a , k t ó r ą m o ż n a s t o s o w a ć d l a l i n i o w e g o m o d e l u p o n k o r z y s t y w a n e g o w p o m i a r a c h b e z p o ś r e d n i c h. D o k ł a d n o ś ć o b l i c p o r ó w n y w a l n a z n u m e r y c z n ą m e t o d ą o d n i e s i e n i a (s y m u l a c j ą M o t e n s a m r e z u l t a t o b l i c z e n i o w y p r z e d z i a ł u r o z s z e r z e n i a , g d y w ą w y z n a c z a s i ę z d w o m a c y f r a m i z n a c z ą c y m i .

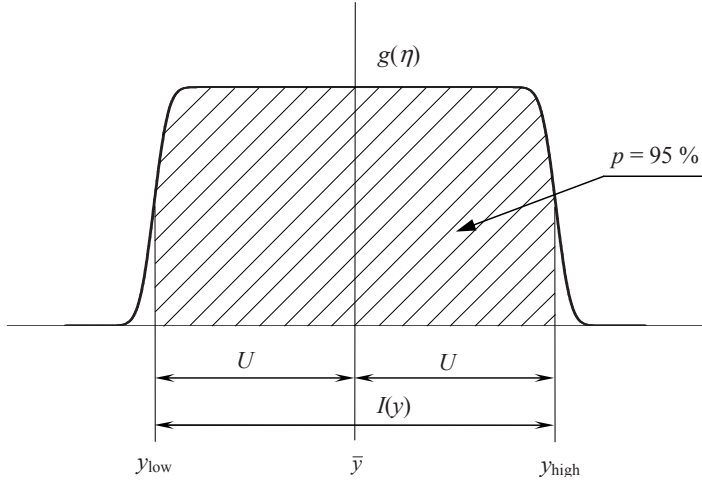
Z o b l i c z a n i e m p r z e d z i a ł u r o z s z e r z e n i a z w i ą z a n e - j e s t r ó w z n a c z a n i a w s p ó ł c z y n n i k a r o z s z e r z e n i a , k t ó r y m o ż e b y ć - t r a k t o k ł a d u w i e l k o ś c i m i e r z o n e j. P r o b l e m a t y k a t a w y n i k a g ł ó w n i e j e g o w a r t o ś c i w ś w i a d e c t w a c h w z o r c o w a n i a p r z y r ą d ó o p r a c o w a n i u w y n i k u w z o r c o w a n i a s t o s u j e s i ę n a o g ó ł l i n i o v c z y n i m e t o d ę s z c z e g ó l n i e p r z y d a t n ą d l a l a b o r a t o r i ó w w z o r c u j

2. Przedział i współczynnik rozszerzenia

D l a w i e l k o ś c i w y j ą c k o s t a s i ę p r z e d z i a ł r o z s z e r z e n i a z a w d a n y m p r a w d o p o d o b i e ĩ s t w e m z b i ó r m o ż l i w y c h w a r t o ś c i d l a P r z e d z i a ł t e n z d e f i n i o w a n y j e s t w p o s t a c i d w ó c h u m o - w n i e p n i c z n y c h (r y s . 1):

$$I(y) = [y_{\text{low}}, y_{\text{high}}] \quad (1)$$

z k t ó r y c h y_{low} o z n a c z a d o l n ą , y_{high} g ó r n ą g r a n i c ę p r z e d z i a ł u.



Rys. 1. Przedział rozszerzenia dla symetrycznego rozkładu wartości wielkości mierzonej

Dla zbioru wartości y można zbudować standaryzowaną zmienną losową w postaci:

$$\eta = \frac{y - \bar{y}}{u(y)} \quad (2)$$

gdzie $\bar{y}$ jest estymatą, a $u(y)$ niepewnością standardową. Można zdefiniować również granice w postaci:

$$\eta_{\text{low}} = \frac{y_{\text{low}} - \bar{y}}{u(y)} = G^{-1}\left(\frac{1-p}{2}\right) \quad (3)$$

$$\eta_{\text{high}} = \frac{y_{\text{high}} - \bar{y}}{u(y)} = G^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right) \quad (4)$$

gdzie $G^{-1}(\alpha)$ jest kwantylem rzędu α rozkładu opisanego dystrybucją $G(\eta)$, a p prawdopodobieństwem rozszerzenia. Dla symetrycznego probabilistycznie rozkładu zachodzi równość:

$$G^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right) = -G^{-1}\left(\frac{1-p}{2}\right) = k \quad (5)$$

gdzie k jest współczynnikiem rozszerzenia. Z uwagi na (3) i (4) mamy:

$$y_{\text{low}} = \bar{y} - k \cdot u(y) = \bar{y} - U \quad (6)$$

$$y_{\text{high}} = \bar{y} + k \cdot u(y) = \bar{y} + U \quad (7)$$

gdzie $U = k \cdot u(y)$ jest niepewnością rozszerzoną.

Dla funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $g(\eta)$ spełnione jest równanie:

$$\int_{-k}^k g(\eta) d\eta = p \quad (8)$$

Na ogół przyjmuje się, że $p = 95 \%$.

Jeżeli wielkość wyjściowa y związana jest zależnością liniową z wielkościami wejściowymi x_i , to funkcja gęstości rozkładu związanego z wielkością mierzoną jest splotem funkcji gęstości rozkładów związanych z wielkościami wejściowymi:

$$g(\eta) = g_1(\xi_1) * \dots * g_N(\xi_N) \quad (9)$$

gdzie ξ_i są standaryzowanymi zmiennymi losowymi wielkości wejściowych:

$$\xi_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{u(x_i)} \quad (10)$$

a $\bar{x}_i$ jest estymatą wielkości wejściowej w postaci wartości średniej, a $u(x_i)$ niepewnością standardową wielkości wejściowej.

3. Metoda analityczna

Metoda analityczna polega na przybliżeniu wyniku operacji splotu matematycznego standardowych rozkładów wielkości wejściowych. Mogą nimi być rozkłady: Studenta, normalny, prostokątny, trójkątny i trapezowy. W metodzie wykorzystano jako bardzo efektywne przybliżenie wielokrotnego splotu rozkładów: normalnego, prostokątnego, trójkątnego i trapezowego rozkładem P*N. Rozkład ten jest pojedynczym splotem rozkładu prostokątnego z normalnym [3]. Funkcję gęstości rozkładu P*N (rys. 2) najdogodniej można przedstawić jako zależną od parametru r , będącego ilorazem odchyłeń standardowych σ_p i σ_N tworzących go rozkładów prostokątnego i normalnego:

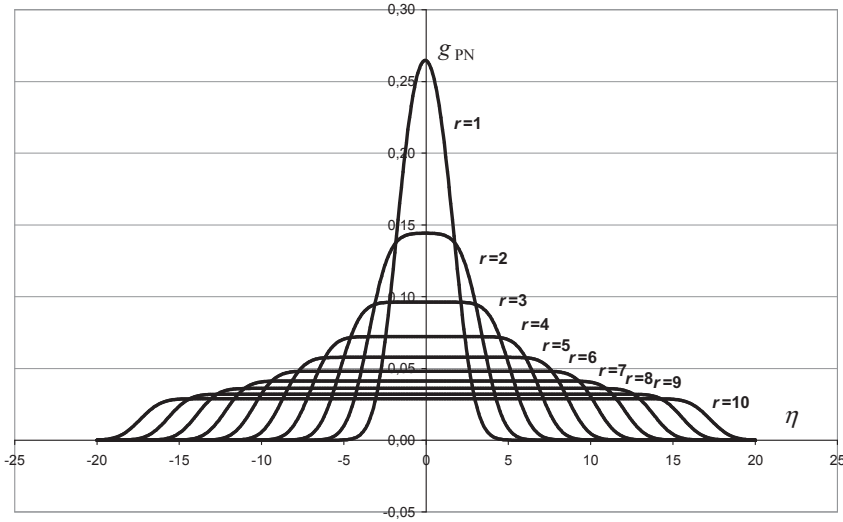
$$g_{PN}(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi} r} \int_{\eta-\sqrt{3}\cdot r}^{\eta+\sqrt{3}\cdot r} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi \quad (11)$$

$$r = \frac{\sigma_p}{\sigma_N} \quad (12)$$

Parametr r rozkładu P*N można przybliżyć ilorazem udziału [4]:

$$r_u = \frac{|u_i(y)|}{\sqrt{u_c^2(y) - u_i^2(y)}} \quad (13)$$

gdzie $u_i(y) = c_i u(x_i)$ to największy udział niepewności wielkości wejściowej o rozkładzie prostokątnym.



Rys. 2. Funkcje gęstości splotu P*N rozkładów prostokątnego i normalnego o różnych parametrach r

Przybliżenie powyższe można rozszerzyć o spłot rozkładów trójkątnych i trapezowych. W celu znalezienia największego udziału wielkości o rozkładzie prostokątnym, w każdym z tych rozkładów należy określić jego większą składową prostokątną. Każdy z tych rozkładów bowiem to spłot dwóch składowych prostokątnych.

Rozkład trójkątny jest splotem dwóch jednakowych rozkładów prostokątnych. Niepewność standardowa wielkości opisanej rozkładem trójkątnym o podstawie $2a$ dana jest zależnością:

$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{6}} \quad (14)$$

Niepewność standardowa składowej prostokątnej tworzącej rozkład trójkątny ma postać:

$$u'(x_i) = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (15)$$

co prowadzi do zależności:

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i)}{\sqrt{2}} \quad (16)$$

Rozkład trapezowy natomiast jest splotem dwóch niejednakowych rozkładów prostokątnych. Niepewność standardowa wielkości opisanej rozkładem trapezowym o podstawie dolnej $2a$ i górnej $2b$ dana jest zależnością:

$$u(x_i) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{6}} \quad (17)$$

Niepewność standardowa większej składowej prostokątnej tworzącej rozkład trapezowy ma postać:

$$u'(x_i) = \frac{a+b}{2\sqrt{3}} \quad (18)$$

co prowadzi do zależności:

$$u'(x_i) = \frac{a+b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} u(x_i) \quad (19)$$

Splot rozkładów Studenta można przybliżyć splotem równoważnych im rozkładów normalnych. Owa równoważność polega na przyjęciu takich rozkładów normalnych, dla których przedziały rozszerzenia są takie same co do wartości, jak wyznaczone na podstawie rozkładów Studenta dla danego poziomu ufności. Aby osiągnąć tę równoważność, należy zastąpić rozkład Studenta rozkładem normalnym, a niepewność standardową wielkości wejściowej powiększyć o iloraz kwantyli tych rozkładów:

$$u'(x_i) = \frac{t(v)}{k_N} u(x_i) \quad (20)$$

gdzie $t(v)$ to kwantyl rozkładu Studenta z liczbą stopni swobody v , a k_N to współczynnik rozszerzenia (kwantyl) rozkładu normalnego ($k_N = 1,96$ dla $p = 95\%$). Błąd powyższego przybliżenia dla splotu dwóch rozkładów Studenta o określonych liczbach stopni swobody nie przekracza 2% (rys. 3).

Niepewność rozszerzoną można wyznaczyć z zależności:

$$U = k_{PN} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{t(v)}{k_N} u_i(y) \right)^2} \quad (21)$$

gdzie k_{PN} to współczynnik rozszerzenia dla rozkładu P*N. Wartości powyższego współczynnika dla prawdopodobieństwa 95% zostały przedstawione w tabeli 1 [5, 6]. Dla rozkładów normalnego, prostokątnego, trójkątnego i trapezowego należy przyjąć, że $t(v) = k_N$.

Współczynnik k_{PN} można również wyznaczyć w przybliżony sposób [7]:

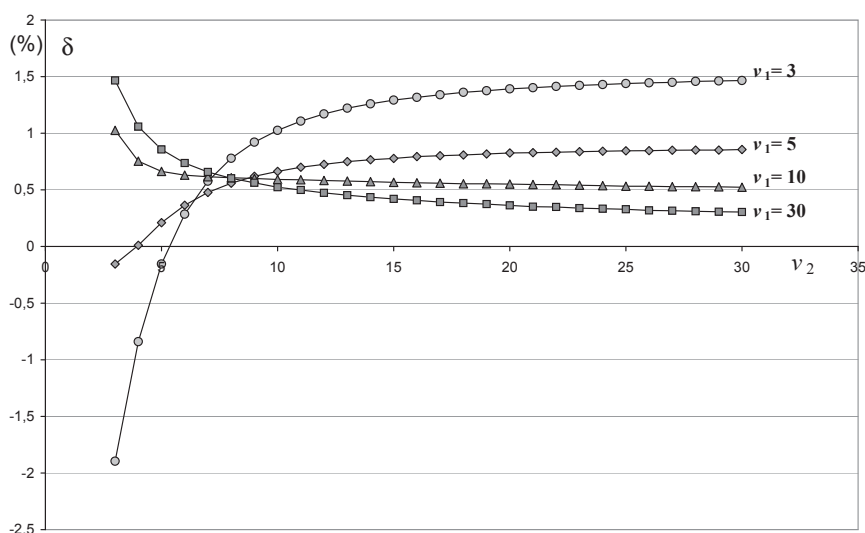
$$\begin{aligned} k_{PN} &= k_N \text{ dla } 0 \leq r < 1 \\ k_{PN} &= k_T \text{ dla } 1 \leq r \leq 10 \\ k_{PN} &= k_p \text{ dla } r > 10 \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie:

$$k_T = \sqrt{\frac{3}{r_u^2 + 1}} (1 + r_u - 2\sqrt{r_u(1-p)}) \quad (23)$$

$$k_p = \sqrt{3}p \quad (24)$$

gdzie k_T to współczynnik rozszerzenia dla rozkładu trapezowego, a k_p to współczynnik rozszerzenia dla rozkładu prostokątnego. Wykorzystano tu przybliżenie rozkładu $P*N$ trzema standardowymi rozkładami: normalnym, trapezowym i prostokątnym w zależności od wartości ilorazu udziału, co również daje dobre wyniki przybliżenia wielokrotnego spłotu wymienionych rozkładów.



Rys. 3. Błąd przybliżenia przedziału rozszerzenia dla spłotu dwóch rozkładów Studenta o różnych stopniach swobody: ν_1 i ν_2

Tab. 1. Wartości współczynnika rozszerzenia k_{PN} dla prawdopodobieństwa 95 % przy granicznych wartościach ilorazu udziału niepewności

k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości
1,96	0,5090	1,85	1,6410	1,74	3,1930
1,95	0,6985	1,84	1,7380	1,73	3,4410
1,94	0,8240	1,83	1,8390	1,72	3,7300
1,93	0,9280	1,82	1,9460	1,71	4,0740
1,92	1,0220	1,81	2,0600	1,70	4,4925
1,91	1,1110	1,80	2,1820	1,69	5,0235
1,90	1,1980	1,79	2,3135	1,68	5,7350
1,89	1,2840	1,78	2,4560	1,67	6,7760
1,88	1,3700	1,77	2,6120	1,66	8,5975
1,87	1,4580	1,76	2,7845	1,65	∞
1,86	1,5480	1,75	2,9765		

Obliczając, na podstawie równania propagacji niepewności, złożoną niepewność standardową $u_c(y)$ można również wyznaczyć współczynnik rozszerzenia z:

$$k = \frac{U}{u_c(y)} \quad (25)$$

który jest przybliżeniem kwantyla rozkładu związanego z wielkością mierzoną.

4. Ocena dokładności metody

Ocenę dokładności metody można przeprowadzić porównując wartości niepewności rozszerzonej otrzymanych powyższą metodą z wartościami uzyskanymi przy zastosowaniu obliczeń numerycznych. Błąd metody zdefiniowano jako:

$$\delta = \frac{U - U_{\text{splot}}}{U_{\text{splot}}} \quad (26)$$

gdzie U to niepewność rozszerzona obliczona ze wzoru (21), a U_{splot} to niepewność rozszerzona obliczona metodą wielokrotnego splotu rozkładów wielkości wejściowych.

Błąd metody analizowano dla prawdopodobieństwa 95 % w odniesieniu do wielokrotnego splotu rozkładów prostokątnych oraz splotu mieszanego rozkładów prostokątnych i normalnych. Obliczenia wykonano zarówno przy zastosowaniu do wyznaczania współczynnika k_{PN} tabeli 1, jak i formuły przybliżonej (22).

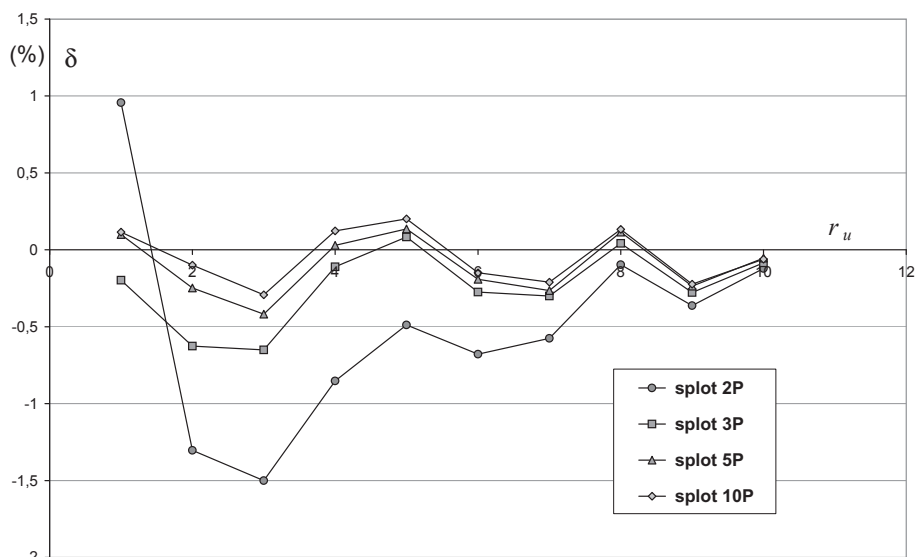
Błąd w pierwszej sytuacji obliczeniowej przedstawiają rysunki 4 i 5. Największą wartość osiąga w odniesieniu do splotu dwóch rozkładów prostokątnych, dla których dochodzi do 1,5 %. W pozostałych przypadkach splotu wielu rozkładów prostokątnych nie przekracza wartości 1 %, a w przypadku splotu mieszanego rozkładów prostokątnych i normalnych błąd jest mniejszy od 0,5 %.

Błąd w drugiej sytuacji obliczeniowej przedstawiają rysunki 6 i 7. Jego największa wartość nie przekracza 2,5 %, a w przypadku wielokrotnego splotu rozkładów prostokątnych błąd jest mniejszy od wartości 1,5 %.

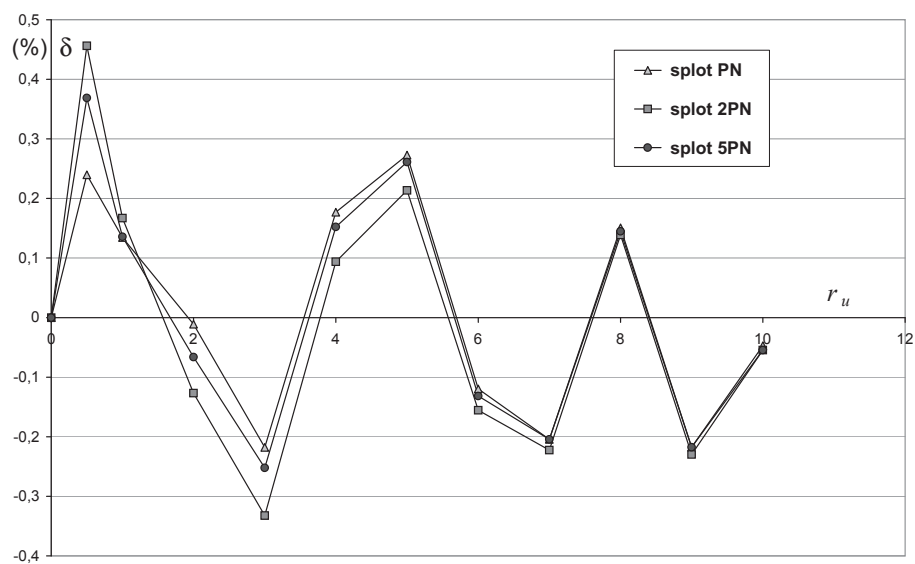
Porównywalne wartości błędów metody, przy obliczeniach wykonywanych dwoma opisanymi sposobami, wynikają z faktu niewielkich różnic pomiędzy wartościami odpowiadających sobie współczynników k_{PN} i k_{T} . Ich przebieg ilustruje rys. 8. Błąd względny porównania powyższych współczynników można zdefiniować przy użyciu formuły:

$$\delta_{\text{T}} = \frac{k_{\text{T}} - k_{\text{PN}}}{k_{\text{PN}}} \quad (27)$$

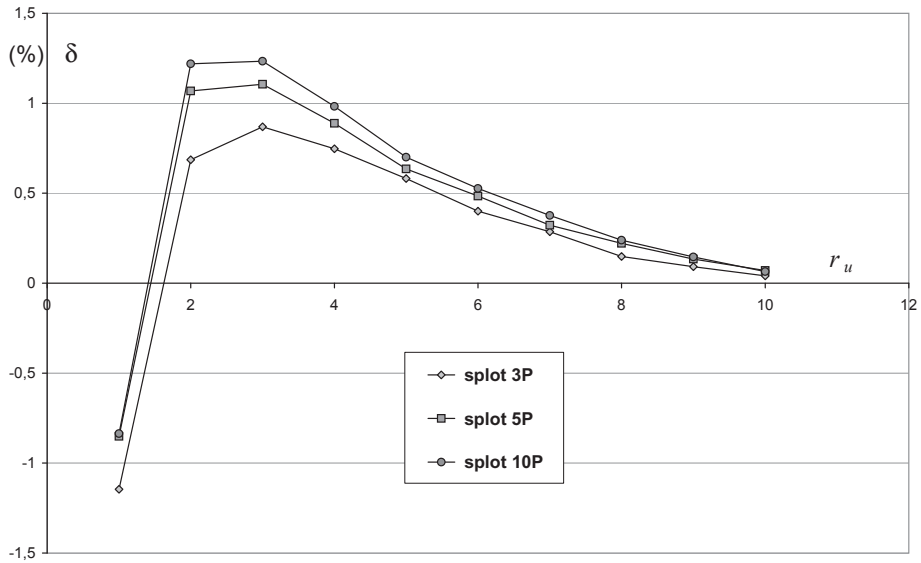
Błąd ten w funkcji ilorazu r dla prawdopodobieństwa $p = 95 \%$ przedstawiono na rys. 9. Wartość błędu nie przekracza 1,5 % dla zakresu zmian ilorazu r od 1 do 10, w którym ma zastosowanie równość $k_{\text{PN}} = k_{\text{T}}$ (22). Natomiast maksymalna wartość błędu przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla rozkładu P*N trzema standardowymi rozkładami: normalnym, trapezowym i prostokątnym, dla pełnego zakresu zmienności ilorazu r , mieści się w przedziale $\pm 2 \%$, co ilustruje rys. 10.



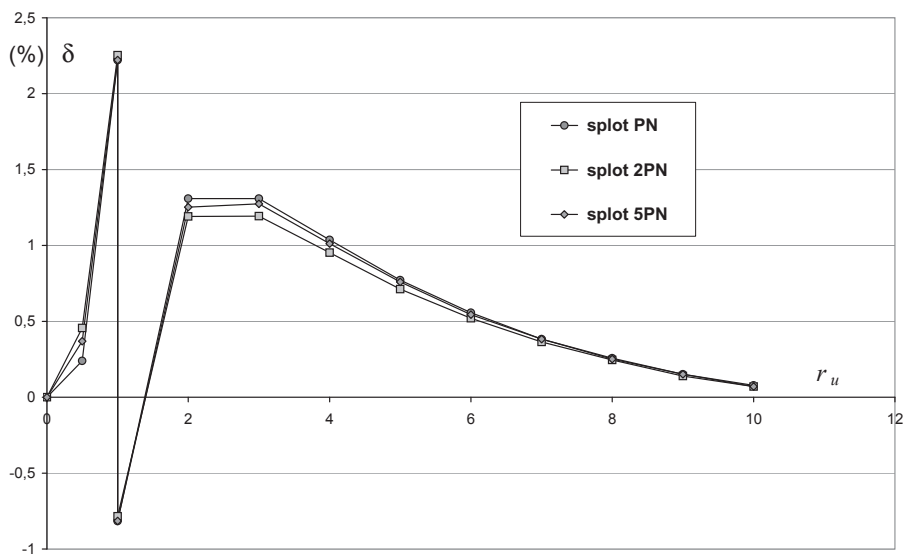
Rys. 4. Błąd metody w odniesieniu do splotu dwóch (2P), trzech (3P), pięciu (5P) i dziesięciu (10P) rozkładów prostokątnych przy wykorzystaniu tabeli 1



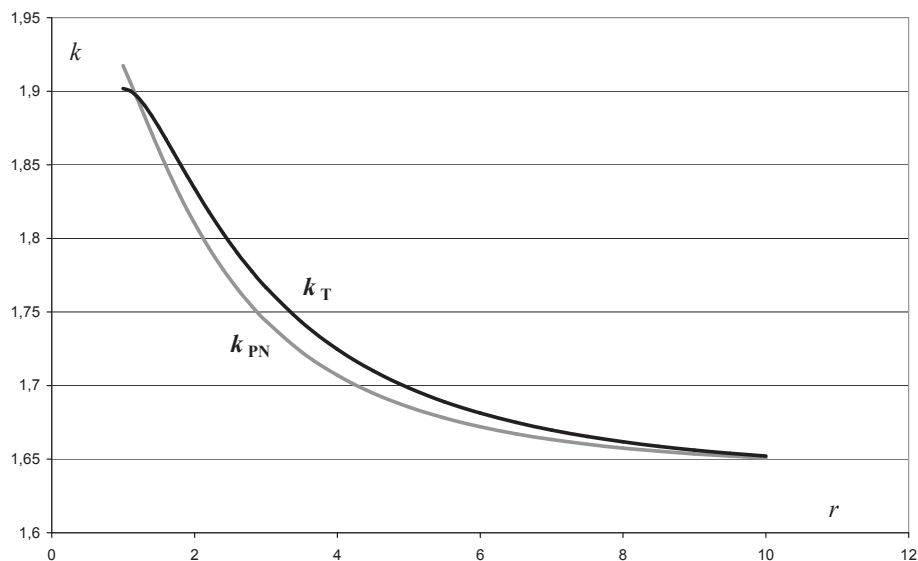
Rys. 5. Błąd metody w odniesieniu do splotu pojedynczego (PN), podwójnego (2PN) i pięciokrotnego (5PN) rozkładów prostokątnego i normalnego przy wykorzystaniu tabeli 1



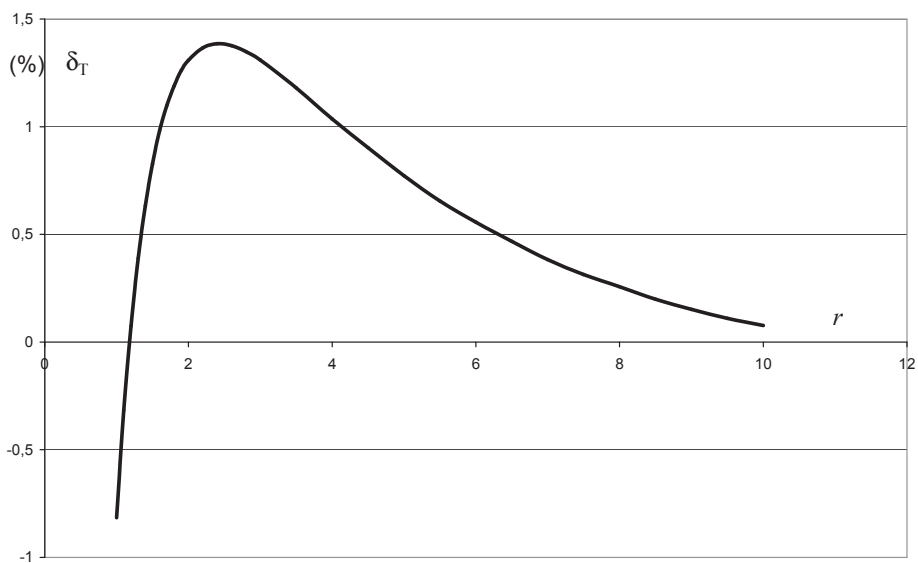
Rys. 6. Błąd metody w odniesieniu do splotu trzech (3P), pięciu (5P) i dziesięciu (10P) rozkładów prostokątnych przy zastosowaniu przybliżenia (22)



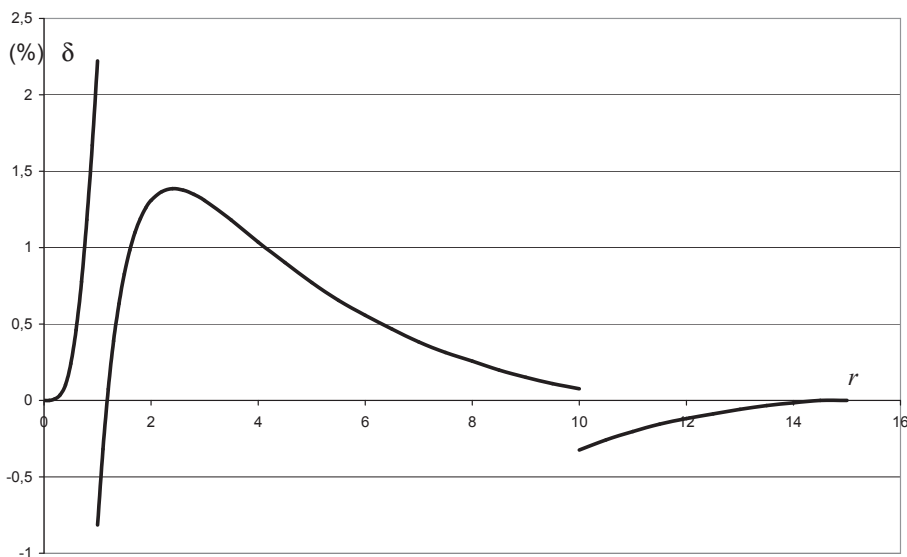
Rys. 7. Błąd metody w odniesieniu do splotu pojedynczego (PN), podwójnego (2PN) i pięciokrotnego (5PN) rozkładów prostokątnego i normalnego przy zastosowaniu przybliżenia (22)



Rys. 8. Współczynnik rozszerzenia dla splotu rozkładu prostokątnego z normalnym i dla rozkładu trapezowego dla $p = 95 \%$



Rys. 9. Błąd przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla splotu rozkładów prostokątnego i normalnego współczynnikiem rozszerzenia dla rozkładu trapezowego, dla $p = 95 \%$



Rys. 10. Funkcja błędu metody aproksymacji współczynnika rozszerzenia

Na podstawie przedstawionej analizy można oczekiwać, że błąd w przypadku przybliżenia niepewności rozszerzonej wielkości wyjściowej, będącej złożeniem wielu wielkości wejściowych opisanych rozkładami Studenta, normalnymi czy prostokątnymi, nie powinien być większy niż przedstawiony powyżej, ponieważ spłot rosnącej liczby rozkładów składowych dąży do rozkładu normalnego.

Należy dodać, że metodę można stosować przy spełnieniu następujących warunków: wielkość wyjściowa jest funkcją liniową wielkości wejściowych, wielkości wejściowe są zmiennymi losowymi niezależnymi oraz wielkościom wejściowym można przypisać następujące rozkłady: Studenta, normalny, prostokątny, trójkątny lub trapezowy. Konieczność spełnienia tych warunków wynika z zastosowania operacji splotu matematycznego przy obliczaniu rozkładu wynikowego, którą można wykonać, gdy mamy do czynienia z liniową zależnością pomiędzy wielkościami wejściowymi, będącymi jednocześnie zmiennymi losowymi niezależnymi. Jednakże warunki te w niczym nie ograniczają praktycznej stosowalności metody, gdyż przy opracowaniu wyników pomiaru, szczególnie bezpośredniego, z założenia stosuje się modele liniowe pomiaru, zawierające szereg składowych powiązanych ze sobą addytywnie. Przypisywanie tym składowym podstawowych rozkładów prawdopodobieństwa też nie czyni istotnego problemu. Z reguły bowiem przypisuje się im właśnie te rozkłady; Studenta przy analizie składowej przypadkowej, a pozostałe przy ocenie składowych systematycznych. Metoda zatem nadaje się w pełni do analizy wyniku pomiaru bezpośredniego.

5. Podsumowanie

Analityczna metoda obliczania przedziału i współczynnika rozszerzenia powstała w celu opracowania wyniku pomiaru wyrażanego w postaci przedziału rozszerzenia, zgodnie z przyjętymi definicjami zawartymi w najnowszych międzynarodowych, metrologicznych dokumentach dotyczących analizy danych pomiarowych [1]. Metoda jest alternatywna dla zalecanej tam numerycznej metody odniesienia (Monte Carlo), gdy mamy do czynienia z liniowym lub linearyzowanym modelem pomiaru. Przy czym nie wymaga zastosowania zaawansowanych, specjalistycznych programów komputerowych i może być w prosty sposób implementowana do powszechnie dostępnych narzędzi obliczeniowych, np. w postaci arkusza kalkulacyjnego. Jej dokładność obliczeniowa jest porównywalna z metodą odniesienia. Pozwala na wyznaczanie niepewności rozszerzonej dla prawdopodobieństwa 95 % z zachowaniem wiarygodności drugiej cyfry znaczącej przy jej wyrażaniu.

Pierwotnie metoda powstała jako technika obliczeniowa służąca do realizacji postulatu, dotyczącego wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru przy wzorcowaniu, wyrażonego w dokumencie [2]. Postulat ten mówi o konieczności wyznaczania współczynnika rozszerzenia dla poziomu ufności 95 % na podstawie rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa estymaty wielkości wyjściowej. Przy czym przez rzeczywisty można rozumieć rozkład powstały w wyniku złożenia rozkładów przypisanych poszczególnym wielkościom wejściowym. Matematyczne modele pomiaru stosowane przy wzorcowaniu to równania liniowe lub linearyzowane, gdzie wielkości wejściowe traktowane są na ogół jako zmienne losowe niezależne. Stwarza to warunki do zastosowania operacji splotu matematycznego do wyznaczania rzeczywistego rozkładu dla wielkości wyjściowej i obliczania współczynnika rozszerzenia, jako kwantyla tego rozkładu dla określonego prawdopodobieństwa rozszerzenia. Rozwiązanie to szczególnie przydatne jest przy podawaniu powyższego współczynnika w świadectwach wzorcowania. Ponieważ zagadnienie to dotyczyło głównie pomiarów związanych zapewnieniem spójności pomiarowej, to metoda została pierwotnie opublikowana w biuletynie międzynarodowej organizacji metrologii prawnej (OIML) [8]. Następnie przedstawiono ją w czasopiśmie naukowym międzynarodowej organizacji metrologii naukowej (IMEKO) [9]. W tym czasie toczyła się międzynarodowa dyskusja dotycząca wyrażania niepewności pomiaru w postaci przedziału rozszerzenia, wyznaczanego metodą propagacji rozkładów wielkości wejściowych na podstawie modelu matematycznego dla wielkości wyjściowej. Dyskusja toczyła się głównie w kręgach metrologicznych związanych z organizacjami skupionymi wokół Międzynarodowego Biura Miar (BIPM).

Wraz z przyjęciem nowych rozwiązań w tej dziedzinie została zaproponowana analityczna metoda obliczenia przedziału rozszerzenia i opublikowana w czasopiśmie firmowanym przez BIPM [10]. Ponieważ opiera się na składaniu standardowych rozkładów prawdopodobieństwa, szczególnie nadaje się dla opracowania wyniku pomiaru bezpośredniego, dla którego stosuje się model matematyczny w postaci liniowego równania pomiaru. Metoda doczekała się też praktycznej reali-

zacji. Zastosowano ją do analizy wyniku pomiaru uzyskanego przy użyciu laserowego przyrządu skanującego, stosowanego do bezstykowego pomiaru małych średnic zewnętrznych [11, 12].

Literatura

- [1] *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method.* ISO/IEC Guide 98-3/Suppl. 1:2008. BIPM JCGM 101:2008. Guide OIML G 1-101, Edition 2008 (E).
- [2] *Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration.* European co-operation for Accreditation. Publication Reference EA-4/02, 1999.
- [3] C. F. Dietrich: *Uncertainty, Calibration and Probability.* The Statistics of Scientific and Industrial Measurement. Second Edition 1991.
- [4] P. Fotowicz: *Obliczanie niepewności rozszerzonej metodą analityczną opartą na splocie rozkładów wielkości wejściowych.* PAR nr 1 (2005), s. 5-9.
- [5] P. Fotowicz: *Metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru.* PAR nr 10 (2003), s. 13-16.
- [6] P. Fotowicz: *Metody obliczania współczynnika rozszerzenia w oparciu o spłot rozkładu prostokątnego z normalnym.* PAK nr 4 (2004), s. 13-16.
- [7] P. Fotowicz: *Zasada przybliżenia rozkładu wyniku pomiaru przy wzorcowaniu.* PAR nr 9 (2001), s. 8-11.
- [8] P. Fotowicz: *Method for calculating the coverage factor in calibration.* OIML Bulletin, vol. XLIII (2002), s. 5-9.
- [9] P. Fotowicz: *A method of approximation of the coverage factor in calibration.* Measurement, vol. 35 (2004), s. 251-256.
- [10] P. Fotowicz: *An analytical method for calculating a coverage interval.* Metrologia, vol. 43 (2006), s. 42-45.
- [11] P. Fotowicz: *Practical application of an analytical method for calculating a coverage interval.* Measurement Science and Technology vol. 21 (2010) 087001 (7s.).
- [12] P. Fotowicz, R. Jabłoński: *Zastosowanie analitycznej metody obliczania przedziału rozszerzenia do oceny niepewności pomiaru małych średnic zewnętrznych laserowym przyrządem skanującym.* PAR nr 2 (2010), s. 5-11.

WSPÓŁCZESNE PODEJŚCIE W DZIEDZINIE WYRAŻANIA WYMIARU

Paweł Fotowicz

Główny Urząd Miar

1. Wstęp

We współczesnej metrologii zmienia się podejście do dziedzin i ni ku po mi a ru. Tra dyc yj na o c e na , p o s t a c i s t a t y s t y c z n e j a n a l i z y i z a s t ę p o a n a j e s t p r o b a b i l i s t y c z n ą o c e n ą ź r ó d e ł n i e p e ł n o ś c i z ł i ą ż i e l k o ś c i m i e r z o n e j .

Ko n c e p c j ę p r o b a b i l i s t y c z n e g o o p r a c o a n i a w n i k u p o m i a r u p r o r o d o w y d o k u m e n t [1], w y d a n y w l a t a c h d z i e ł i ę d z i e s i ą t y c h u b i e g ę g o s i e d e m n a j ą ż n i e j s z y c h o r g a n i z a c j i m e t r o l o g i c z n y c h . K o n c e p c j a t r a k t o a n i e , p r z y o p r a c o a n i u w n i k u p o m i a r u , i n f o r m a c j i p o c h o ź r ó d e ł s z c z e g ó l n i e t y c h k t ó r e w y ł o d z ą s i ę s p o z a s a m e g o p o m i a r u , p o d s t a w i e i a r y g o d n y c h a n a l i z z ł i ą ż a n y c h z o p i s e m p r o c e s u p o m a c j e t e z a p i s y a n e s ą p o s t a c i z m i e n n y c h l o s o w y c h , a d a l s z e o d b y a s i ę z g o d n i e z r e g u ł a m i r a c h u n k u p r o b a b i l i s t y c z n e g o . P o d p o t w i e r d z e n i e i n n y c h o p r a c o a n i a c h [2 ÷ 9] w i o d ą c y c h i n s t y t u t m e t r o l o g i i . W l i t e r a t u r z e m i ę d z y n a r o d o w e j s z c z e g ó l n e m i e j s c e z n a u k o w y c h p o ś i ę c o n y c h z a g a d n i e n i o m n i e p e ł n o ś c i p o m i a r u [10].

O b e c n i e o p r a c o w y a n y j e s t p a k i e t d o k u m e n t ó w w y z n a c z a j ą c y w d z i e d z i n i e o p r a c o a n i a d a n y c h p o m i a r o w y c h . P a k i e t t e n f i M i ę d z y n a r o d o w e B i u r o M i a r .

2. Dokumenty przygotowywane pod egidą Międzynarodowego Biura Miar

W 1997 ro ku p o d e g i d ą M i ę d z y n a r o d o w e g o B i u r a M i a r (BIP M) z o ł ą n y W s p ó l n y K o m i t e t d s . P r z e ł o d n i k ó w M e t r o l o g i i (CIPM – *for Guides in Metrology*), k t ó r e g o z a d a n i e m j e s t o p r a c o a n i e n o w y c h z a n i a n i e p e ł n o ś c i p o m i a r u i z ł i ą ż a n e j z n i m i t e r m i n o l o g i i . P r a c o w d ł ó c h g r u p a c h r o b o c z y c h . P i e r ś s z a z n i c h z a j m u j e s i ę b e z p o s n i a m i z ł i ą ż a n y m i z n i e p e ł n o ś c i ą p o m i a r u , a d r u g a z p r o b l e m a t y l n ą . O ł o c e m d z i a n i a p i e r ś s z e j g r u p y j e s t z e s t a w t r z e c h d o k u m e a o ł o c e m p r a c y d r u g i e j g r u p y m i ę d z y n a r o d o w y s ł o w n i k t e r m i n o l o g i k i e m r o z p o z n a ł c z y m p r a c p i e r ś s z e g o z e s p o w i e d z i e n i m GUM (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*), a d r u g i e g o a k r o n i m VIM (*International Vocabulary of Basic Terms in Metrology*). Na l e ż y d o d a ć , ż e d o k u m e n t [28] j e s t e l e k t r o n i c z n ą w e r s j ą P r z e ł o c n i e p e ł n o ś c i p o m i a r u , w y d r u k o a n e g o p i e r ś o t n i e w 1993 ro ku . O b

mo de li nie lo wymia ro ych, celu yz na c z e n i a dla nich o dpo i mia ro e go ro z k du pra do po do bie nst a . Na je go po dst a nie mo po nie dni k prz e dz i a ro z sz e rz e n i a , ja k dla nie lko sci je dno ymi o bsz a ru ro z sz e rz e n i a . Obsz a r t e n o gólnym prz ypa dku po i n i e n by dla o kre slo ne go pra do po do bie nst a . W prz ypa dku nie lo wymia ro e sa , ja ko ro z k du nie lko sci yjsc i o e j , prz ybi e ra po sta c hi pe r-e li prz ypa dka c h mo ze prz ymo a c po sta c hi pe r-pro sto kat a . Ma t e r i a ki lko ma prz yk da mi o bli c z e n i o ymi .

„Supple me nt 3 to the Guide – Mo de lling” (JCGM 103) – do kume nt t r z e c h g n y c h z a ga d n i e n : t o r z e n i a mo de lu po mi a ru, kla syfika i c h o bli c z e n . P i e r s z e z z a ga d n i e n o ma i a ja k , prz y z na jo mo i pra ktyki po mi a ro e j , po i a z a c nie lko sci e jsc i o e z nie lko sci U z g l e d n i a s i e t u o d d z i a n i e nie lko sci p a j a c y c h na yni k p byc ni mi z a r o n o o d d z i a n i a prz ypa dko e ja k i syst e ma t y c z n e . de li do t y c z y ma t e ma t y c z n e go o p i s u po mi a ru be z po s r e d n i e go i p je dno i nie lo wymia ro e j , t y m e k t o r o y c h . O b l i c z e n i a na t o r z y z na c z a n i e m e s t y m a t p o y z s z y c h nie lko sci i po i a z a n y c h z z u z g l e d n i e n i e m i c h k o r e l a c j i .

„The ro le o f m e a s u r e m e n t u n c e r t a i n t y i n c o n f o r m i t y a s s e s s m e n t ” – do kume nt do t y c z y o c e n y z go dno sci nie lko sci m i e r z o - n e j z o n i a m i . W y m a g a n i a y z na c z a j a g r a n i c e z go dno sci po sta c i prz mo zli ych a r t o sci nie lko sci m i e r z o n e j . P r z e d z i a t e n po i n i e o c z e k i a n a i o d c h y l a n i e s t a n d a r d o e ro z k du z i a z a n e go z P o n i e a z i e d z a o nie lko sci m i e r z o n e j n i g d y n i e j e s t k o m p l e o kre slo ne r y z y k o c e n y z go dno sci . Ma t e r i a p r z e d s t a i a p r o b l pra do po do bie nst a z go dno sci k o n t e k s t e b e d o y z na c z a n i a i s t r e f y a k c e p t a c j i . R o z a z a prz ypa d e k p r z e d z i a d u s t r o n n e go z i do l n a g r a n i c a o r a z prz ypa d e k p r z e d z i a j e dno s t r o n n e go z o k r g r a n i c a i z e r o a do l n a a r t o s c i a g r a n i c z n a .

„Applic a t i o n s o f t h e l e a s t - s q u a r e s m e t h o d ” – do kume nt do t y c z y ko r z y s t a n i a m e t o d y na j m n i e j s z y c h k a d r a t o p r z y z o r c o a n i u i a t o d a u m o z l i i a y z na c z e n i e f u n k c j i o k r e s l a j a c e j r e l a c j e p o m i e d z y nie lko sci m i e r z o n e j , a a r t o s c i a o d p o i e d z i z o r o a - n e go l u b d z e n i a po mi a ro e go . J e j y n i k i e m j e s t o k r e s l e n i e p a r a m e t r o a d j a n i e k r z y e j k a l i b r a c j i . W p r o c e s i e k a l i b r a c j i t y p o y m i nie lko sci a r t o s c i c e r t y f i k o a n y c h z o r c o o d n i e s i e n i a . D o p a s o a n i e p o f a k t n i e p e n o s c i po mi a ro y c h z i a z a n y c h z t y m i a r t o s c i a m i . l i n i o e j l u b n i e l i n i o e j k r z y e j k a l i b r a c j i , p r z y y z na c z a n i u k t o r e i e d z e n a t e m a t z j a i s k f i z y c z n y c h z i a z a n y c h z y k o n y a n y m p o r

P o y z s z e do kume nt y y z na c z a j a p o d s t a o y k a n o n o - p r a c o : m i a ro y c h , m y s l k s z t a u j a c e j s i e s p o z e s n i e k o n c e p c j i m e t r o l o n o s z a s p o l n y t y t u „Eva lua t i o n o f m e a s u r e m e n t d a t a ” . C e l e m i c h j e p r a c o a n i e s p o l n e j m e t o d y k i o p r a c o a n i a y n i k u po mi a ru, je dno o bsz a ru z a s t o s o a n i m e t r o l o g i c z n y c h .

zaś nie rażąco go z określa nym przedziałem tą hipotezę
działa buduje się wokół wartości średniej otrzymanej na podstawie
Zakłada się przy tym, że szereg o bierzący jest z populacji
normalnym.

Drugie podejście (Uncertainty Approach) nie przyjmuje za to że
hipotezę, po jedyną wartość przedziału, ale traktuje jako
można przypisać wielkości mierzonej jako jej wartość przedziału.
Wzyskamy zatem wielkości można przypisać o określony zbiór możliwych
Zbiór taki można wyznaczyć przedziału i postać rozkładu p-
stosów. Obliczenia wykonywane są metodą propagacji rozkładów przy
ściom i jest to tym podobne do metody matematycznej wielkości i jest
można realizować wartość metodą Monte Carlo, a przy pomocy metody
dla pomiarów bez pośrednictwem lub pośrednictwem linearyzacji (różni-
opearacji) spłutujemy matematycznie. Miarą niepewności pomiaru jest
rozszerzenia rozkładu jest to i tego obliczenia dla określonego
rozszerzenia, na górnym poziomie 95 %.

4. Historyczne źródła niepewności pomiaru

Można postawić pytanie, gdzie należy szukać początków k-
spółzależnej myśli dziedzinie o pracowniach danych pomiarów i
stosownych można i z trzema interakcjami o siłami i mi-
nej. Wszelkie pojęcia się przed tym samym zająć t-
interakcji listy z przebiegu XVIII i XIX wieku.

Adrien Marie Legendre (1752 – 1833), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)
re Simon Laplace (1749 – 1827), zająć się o ich publikacji, stworz-
spółzależnej metody o pracowniach danych pomiarów i. Prze-
podstawie rozkładu, które spółzależnie są podane i
mniejszych kładach, przed propagacją błędów oraz centralne i
Przedstawione zostały, niestety, na marginesie zająć się publi-
1805, 1809 i 1810. Prace nie tylko oddziaływały na dziedziny ra-
szerzenia o pracę.

Legendre dziedzinie pt. „No uvelles methodes pour la determi-
nations des courbes”, które ukażą się w 1805 roku zająć się k-
„Sur la methode des moindres quarrés”. Przedstawia i nim metod-
sumy kładach błędów. Jeżli przedstawiemy różnicę wielkości mierzo-
linio i jest to może myślenie zająć się szeregiem błędów i wielkości:

$$E_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z + \dots \quad (1)$$

gdzie $a_i, b_i, c_i, \dots$ są znanymi współczynnikami, a nieznanymi wielkościami
jest to ymi. Zmienne różnicą można wyznaczyć podnosząc do
i sumując je tak, aby wyznaczyć na jmnieszych kładach wartości
metoda ta stosowana jest i analizie regresji.

Ko le jne ro z  i  a z a n i e p r z y n o s i p r a c a G a u s s a z 1809 r o k u p t . „The po rum Co e le s t i u m i n S e c t i o n i b u s C o n i c i s S o l u m A m b i e n t i u m”. Aut po d o b n i e  y g  a d  a j  c y l i n i o  y u k  a d r  o n  a n  :

$$V_i = a_i x + b_i y + c_i z + \dots \quad (2)$$

i f o r m u  j e b  d j a k o r  z n i c   p o m i  d z y o b l i c V z o n  a  a b s o r b c i  a n  

$$\Delta_i = V_i - M_i \quad (3)$$

P r a  d o p o d o b i e  n s t  o b  d u c h a r a k t e r y z u j e t  r z y  s t čo s t e m e t r y c z n a i o s i  g a m a k s i m u m  l  . P r z y m u j e a k s j o m a t , že n a j b a r d z i e j p r a  d o  a r t o  c i   p o j e d y n c z e j , n i e z n a n e j o b s e r  a c j i j e s t  r e d n i a a r y t m e u z y s k a n e g o  t y c h s a m y c h  a r u n k a c h p o m i a r o  y c h p o d c z  a s  i e l c r z a n i a o b s e r  a c j i . P o s t u l u j e , d o o p i s u k r z y  e j (r o z k  a d u) b  d u , p r

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} \quad (4)$$

g d z i   j e s t s t a   z  i  a z a n   p r e c y z j   p o m i a r u . J a k o c i e k a  o s t k    o r y g i n a l n y m z a p i s i e d z i e   z n a j d u j e s i    z  r (b e z n a či a s či z r

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta} \quad (5)$$

P o  y  s z y z a p i s t o p o s t a   f u n k c j i g  s t o  c i r o z k  a d u n o - r m a l n e   n o  e j).

Z n a j d u j e m y   p o  y  s z y m d z i e l e r   n i e   z z a p i s r   n   n   b  d u , p o d o p i s u r  z n i c z k i z u p e  n e j ,   p o s t a c i s u m y s k   d o  y c h p o p r z e d z o n y c c z  s t k o  y m i . J e s t t o p i e r  o t n y z a p i s p r a  a p r o p a g a c j i b  d u .

W 1810 r o k u L a p l a c e   s čo i m „Supple me nt a u m e m o i r e ” f o r m u   j e že l i b  d k a  d e j o b s e r  a c j i j e s t t a k i s a m , t o p r a  d o p o d o b i e  n s t n o b s e r  a c j i b  d z i e z a  a r t y   g r a j e i s t a r čím e  

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{2k'}} \int \exp \left[-\frac{k}{2k'} r^2 \right] dr \quad (6)$$

g d z i   j e s t d   g o  c i   p r z e d z i a či ,  e  n  t r z k t  r e g o z a  a r t y j e s t b  d s e r  a c j i . P r a  d o p o d o b i e  n s t  o b  d u z a  a r t   g o h /   d o r   h c z a c h o d a u t o r o z n a x t h   o r  p (z d e f i n i u j e , že :

$$k = \int \varphi \left(\frac{x}{h} \right) dx, \quad k' = \int \frac{x^2}{h^2} \varphi \left(\frac{x}{h} \right) dx \quad (7)$$

J a k o c i e k a  o s t k   m o  n a d o d a  , że  o r y g i n a l e z n a j d u j e m y z a p i s c a  k o że g o   p o s t a c i (o d  r  c e n i e z a p i s u f u n k c j i p o d c z  o że j o z n a c z e n i a l i c z b y e):

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{k}{2k'}} \cdot \int dr \cdot c^{-\frac{k}{2k'} r^2} \quad (8)$$

W ten sposób pojął się te z a je dne go z po dst a o y c h t i e pra do po do bie nst a , a mi a no i c i e c e n t r a l n e g o t i e r d z e n i a g r

Na le ży t e ż d o d a ć , że L a p l a c e j e s z c z e ł a t a c h s i e d e m d z i e l e c i a f o r m u ł e t r z y ł a r u n k i d o t y c z ą c e k r z y ł e j (r o z k ł a d u) b ł ę d u : t r y c z n a ł z g ł ę d e m ł a r t o ś c i p r a ł d z i ł e j , g d y ż o b s e r w a c j e j e d n a k o ł o d n i e j ł k i e r u n k u ł a r t o ś c i ł i ę k s z y c h i m n i e j s z y c h ; m u s i - z d ą ż a ć c l a j ą c s i ę o d ł a r t o ś c i p r a ł d z i ł e j , g d y ż p r a ł d o p o d o b i e n s t a , że ł a c j i m o ż e b y ć n i e s k o ń c z e n i e r ó ż n a o d ł a r t o ś c i p r a ł d z i ł e j j e s t r (p o l e p o ł i e r z c h n i p o d k r z y ł ą b ł ę d u) m u s i l i c z b o ł o b y ć r ó ż n y j e d n e j e s t z d a r z e n i e , że k a ż d a o b s e r w a c j a z a ł a r t a j e s t p o d t ą k r s p e ł n i a o c z y ł i ś c i e k r z y ł a r o z k ł a d u n o r m a l n e g o , a l e p r o p o z y c n i a d o o p i s u r o z k ł a d u b ł ę d u p o m i a r u p r z e d s t a ł i ł d o p i e r o - G a u s s (I k o ł o u ł a ż a ł że t a k i e k r y t e r i a m o ż e s p e ł n i ć ł i e l e f u n k c j i , m . i . n . n p . $e(x) = (1/2) \cdot \ln g(|x|)$, g d z i ę ł y z n a c z a g r a n i c ę p r z e d z i ł i ł o b ł ę d o - ł a n i e z 1777 r o k u) .

H i s t o r y c z n i e , z a g a d n i e n i e ł a r t o ś c i p r a ł d z i ł e j z ł i ą z a n e j z r u p o j ą ł i ą s i ę ł p r a c a c h p r e k u r s o r ó ł s p ó ł z e s n e j m e t r o ł o g i i . J u ż u ł i a d a m i a n o s o b i e , że ż a d e n ł y n i k p o m i a r u n i e b ę d z i e z g o d n y ł a r t o ś c i ą p r a ł d z i ł ą . P r z y k ą ż d y m p o j e d y n c z y m p o m i a r z e p o p e ł n i a ł y n i k a j ą c y z ł o s o ł o ś c i o d c z y t u ł a r t o ś c i o b s e r w a c j i . P o z o s t a j n i e z n a n a r ó ż n i c a p o m i ę d z y ł a r t o ś c i ą o b s e r w a c j i i j e j ł a r t o ś c i ą z p i e r ł s z y c h m y ś l i c i e l i , k t ó r y z a s t a n ą ł i ą ł s i ę n a k ł e s t ą r o z k ł a d u d ł e j r ó ż n i c y , c z y ł i b ł ę d u p o m i a r u , b y ł T h o m a s S i m p s o n (1710 – 1761) . W 1757 z a s t a n ą ł i ą j ą c s i ę n a d k s z t a ł e m k r z y ł e j b ł ę d u p o m i a r u ł y ł n i o s k o ł p o m i a r u z a ł i e r a s i ę ł g r a n i c a c h o k r e ś ł o n e g o o d c i n k a , t o ł y n i k s i ę p o ł t a r z a ć p r o p o r c j o n a l n i e d o c i ą g u l i a , z . b o 2 ł d , g p r z y ł i n ą j ą c . , ł a r t o ś c i ł o b r ę b i e t e g o p r z e d z i a ł . B y ł t o p i e r ł s z e ł h i s t o r i i g ę s t o ś c i p r a ł d o p o d o b i e n s t a b ł ę d u p o m i a r u , ł p o s t a c i d y s k r e t n e j . ł t ł o d o m y ś l e ć m i a ł o n a p o s t a ć t r ó j k ą t a r ó ł n o r a m i e n n e g o , d l a t k ą t n y c z ę s t o n a z y ł a n y j e s t r o z k ł a d e m S i m p s o n a .

J e d n a k ż e n i e r o z k ł a d t r ó j k ą t n y , l e c z ł ł ś n i e r o z k ł a d n o r m a l n y j e s t a ł o y c h r o z k ł a d ó ł r a c h u n k u p r a ł d o p o d o b i e n s t a , ł ł z ą c y c h d o ł b ł ę d u , a z e ł z g ł ę d u n a p o ł y ż s z e o k o l i c z n o ś c i n o s i r ó ł n i e ż n a z ł ę c e ł a - G a u s s a . S t a ł s i ę p o d s t a ł ą o c e n y ł y n i k u p o m i a r u i j e d n y m z z a ł s t y ł a n y c h ł t e o r i i n i e p e ł n o ś c i . T e o r i a t a b o ł i e m z a k ł a d a , że ł y ł o d z i s i ę z p o p u ł a c j i o r o z k ł a d z i e n o r m a l n y m . T o o c z y ł i ś c i e k ł a d z ł i ą z a n y z ł i e l k o ś c i ą m i e r z o n ą j e s t n o r m a l n y . T e n n a l e ży d o ł s t o s u j ą c m e t o d ę p r o p a g a c j i r o z k ł a d ó ł ł i e l k o ś c i ł e j ś c i o y c h n a ł m a t e m a t y c z n e g o ł i e l k o ś c i ł y j ś c i o ł e j .

T r z y ł y m i e n i o n e p o ł y ż e j h i s t o r y c z n e r o z ł i ą z a n i a t ł o r z ą p o ł s n e j m e t r o ł o g i i t e o r e t y c z n e j ł d z i e d z i n i e o p r a c o ł a n i a ł y n i k n a ł i e l e ł a t p r z e d i c h p r a k t y c z n y m z a s t o s o ł a n i e m i , c - h o ć z o s u k o ł e g o d o ł o d z e n i a , ł ł i a d c z ą o t r a f n o ś c i ł n i o s k o ł a n i a . P o ł s a m y m c z a s i e , n i e z a l e ż n i e ł u m y ś ł a c h i c h t ł ó r c ó ł , g d y ż o b i e g i n f

Obojko niepcji Uncertainty Approach – spożycze społeczne i dyskusja na jej temat dyktando – bałtycki – skałki – oprać – ań – dać. Po de jure to opiera się na twardzieliu Thomasa Bałtyckiego (1702–1802) i jego „Obojku”. W tym miejscu można zauważyć, że po cztery lata z niepełną ilością pomiarów należy żyć i z pewnością Simpsona i Bałtyckiego. Oba żyli i tworzyli tym samym miejscu i czasie i po roku 1802 XVIII wieku.

Teoria przedpodobieństwa runkoiego po zala na cz o ielkości mierzonej po chodzącej spoza pomiaru z danymi p o ielkości mierzonej nigdy nie jest kompletna, ale można ją czuć z sebową informacją je różne natury. Konieczna po yższ a te z y, że rozkład przedpodobieństwa ielkości mierzonej, p liwych dla niej wartości, po stały o parciu o do stępną ied jest na podsta i informacji do starczy nych przez dane po mi prz edsta ia ne są po sta ci funkcji gęstości przedpodobieństwa je st na podsta i do stępnej informacji o ielkości mierzonej kt óra nigdy nie jest pełna i kompletna. Do stępna ied a- o nie j ryzuje sto pień iagry e o, f z b i e f l k o ś m o ż n a y r a z i ć p o p r z e z r m o ż l i y c h d l a n i e j a r t o ś c i . P r z y m u j e s i ę , ż e z b i ó r t y c h a r t o ś c m i e r z o n ą , y r a ż a n ą p o p r z e z j e g o p a r a m e t r y p r o b a b i l i s t y c z n e o c z e k i a n e j , o d c h y l e n i a s t a n d a r d o i e g o i p r z e d z i a r o z s z e r z a n a j e s t m i a r ą e s y m a t y i e l k o ś c i , a o d c h y l e n i e s t a n d a r d o i e s t a n d a r d o i e j .

P r z y j m u j e s i ę , z e Ξ i e d z ę o Ξ i e l k o ś c i m i e r z o n e j m o ż n a c z e i
z p o m i a r u , n a p o d s t a Ξ i e d a n y c h p o m i a r o Ξ y c h o r a z s p o z a p o r
i n f o r m a c j i o p r o c e s i e p o m i a r o Ξ y m . N a p o d s t a Ξ i e a n a l i z y p o Ξ y ż
d Ξ a z b i o r y i n f o r m a c j i . Z b i ó r o k r e ś l o n y n a p o d s t a Ξ i e Ξ i e d z y o
s t a n o Ξ i i n f o r m a c j ę p i ~~pr~~ Ξ o r t n a Ξ o r n o Ξ i e l k o ś c i m i e r z o n e j . P r o ł
s t y c z n e p a r a m e t r y t e g o z b i ó r u Ξ y z n a c z a n e s ą n a o g ó Ξ p r z e d Ξ y .
W t r a k c i e p o m i a r u n a t o m i a s t p o z y s k i Ξ a n e s ą d a n e , k t ó r e s Ξ i ż a d
g i e g o z b i ó r u , k t ó r e g o p a r a m e t r y o k r e ś l a n e s ą m e t o d ą s t a - t y s t y c z n ą
z u j ą z b i ó r p i e Ξ o t n y t Ξ o r z ą c n o Ξ y z ~~po~~ Ξ y m i k o Ξ y n Ξ o r t n a Ξ i n
t a k ż e c h a r a k t e r y z o Ξ a n y j e s t p a r a m e t r a m i p r o b a b i l i s t y c z n y m i .

Wyznaczenie zbiórów yniko iego opiera się na twardzeniu Ba
 że prądopodobieństwo tego zbiór jest iloczynem prądopodob
 ństwogo i zbiórdańch. Zasadę powyższą można zapisać ogólnie

$$p(Y|AB) = C \cdot p(Y|A) \cdot p(Y|B) \quad (9)$$

gdzie Y oznacza ielkości zmierzane, a zbiórdańch pmiarów ych,
 zbiórinformacji o ielkości mierzonej, ynikającą z iedzyo pro
 a C jest stałą proporcjonalności. Celem dzianiania metrologiczne
 zbiórów AB Zapis powyższy oznacza, że informacja o yciestkości i
 a runko a nadanymi pomiarami iedzą cześniejszą B. Pomiary e
 na nie powyższe można zapisać po staćci funkcji gęstości prądop
 ielkości mierzonej:

$$g(\eta|\mu, \sigma) = K \cdot g(\eta) \cdot l(\eta; \mu, \sigma) \quad (10)$$

gdzie K oznacza stałą proporcjonalności gęstości prądopodobieństwo
 dańch pmiarów ych funkcji a rygodności dotyczą iedzyo p
 na podstawie cześniejszej analizy procesu pmiarowego. Funl
 parame try ynikającą z posiadanej iedzy. Na jej podstawie prz
 oczekiwano dc hyle nie sta nadadad się różnić dla tej funkcji ro
 no rmalny po staćci:

$$l(\eta; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left(-\frac{(\eta - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad (11)$$

Dla dańch pmiarów ych o baparametry estymuje się o dpo iedni
 na podstawie serii obserwacji. Estymatą wartości oczekiwanej jest wartość średnia,
 a estymatą odc hyle nia standardowego statystyka baysianańska

$$s(\bar{y})_{\text{Bayes}} = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} s(\bar{y}) \quad (12)$$

gdzie $s(\bar{y})$ to odc hyle nie standardowe e ksperymentalne zbadanie r-
 a cji. Na leży pamiętać, że zależność powyższą można zastosować
 Zastosowanie powyższej statystyki, mierzące odc hyle nia stand
 mentalne go średnie j, spo do a ne jest przyjęcie m za o-że nia o
 kdu dla dańch pmiarów ych. Jak iadomoz podstawie statystyki
 z go dni e z ieniosko a nie m Williama Gosseta (1876 – 1937), ro z kdu
 z o graniczonych liczebnie serii obse rwa cji, że dla n > 30 kdu
 Studenta (ściśle jest to rozkład ilorazu różnic y tej średnie j i a
 po pulacji dańch, o rozk dze n o rmalnym, o dni e sie niu do o
 da rdo iego e ksperymentalne go średnie j). Na leży do dać, że mno żn
 po yżę j jest różny odc hyle niu standardowego mu tego rozk du o lic
 b o d y n = n - 1.

Przyjęcie za o-że nia o no rmalności rozk du ma różnić do
 a miano i c i e t e n, że parametry rozk du dla ielkości mierzo
 z m i e n n y m i l o s o y m i j a k p o d e j s c i u s t a t y s t y c z n y m (gdy ielkości mi

$$g(\eta|y_1, u_1, \dots, y_N, u_N) \propto \exp\left[-\frac{(\eta - y)^2}{2u}\right] \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^2}\right)\eta^2 + \left(\frac{y}{u^2}\right)\eta\right] \quad (20)$$

możemy o to rzec:

$$\frac{y}{u^2} = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{u_i^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{u^2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{u_i} \quad (21)$$

Natomiast i o kreślasię parametry art o ś i o dni esi eni a dla yni kó po ró mi ędz ylabo rat o ryjnych:

$$y = u^2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{u_i^2} \quad \text{oraz} \quad u^2 = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{u_i^2} \right)^{-1} \quad (22)$$

gdz i to est ymat a λ i elko $\dot{\sigma}$ i mi erz o nej o t i r z y m l a b o r a t o r i u m p o m i a r o -
 $\dot{\sigma}$ y m, a u_i t o n i e p e $\dot{\sigma}$ n o $\dot{\sigma}$ $\dot{\sigma}$ t a n d a r d o $\dot{\sigma}$ a z $\dot{\sigma}$ i $\dot{\sigma}$ a z a n a z t $\dot{\sigma}$ a e s t y m a t $\dot{\sigma}$. Z a l e $\dot{\sigma}$ $\dot{\sigma}$ i p o $\dot{\sigma}$,
 $\dot{\sigma}$ t o s u j e s i $\dot{\sigma}$ $\dot{\sigma}$ p r a k t y c e p r z y o c e n i e $\dot{\sigma}$ y n i k $\dot{\sigma}$ p o m i a r $\dot{\sigma}$ p o r $\dot{\sigma}$ n a $\dot{\sigma}$ c z y c h, g d y $\dot{\sigma}$ i e l
 $\dot{\sigma}$ m i e r z o n a, $\dot{\sigma}$ p o s t a c i n p. $\dot{\sigma}$ z o r c a, b a d a s i $\dot{\sigma}$ $\dot{\sigma}$ r $\dot{\sigma}$ $\dot{\sigma}$ z n y c h l a b o r a t o r i a c h, p r a g n $\dot{\sigma}$ a c u
 $\dot{\sigma}$ y n i k $\dot{\sigma}$ a r t o $\dot{\sigma}$ $\dot{\sigma}$ i o d n i e s i e n i a. W y k o r z y s t u j e s i $\dot{\sigma}$ j e p r z y o c e n i e $\dot{\sigma}$ a r t o $\dot{\sigma}$ $\dot{\sigma}$ i o d.
 $\dot{\sigma}$ p o r $\dot{\sigma}$ n a n i a c h k l u c z o $\dot{\sigma}$ y c h, d o r e a l i z a c j i $\dot{\sigma}$ a r t o $\dot{\sigma}$ $\dot{\sigma}$ i j e d n o s t k i m i a r y S I, p o $\dot{\sigma}$
 $\dot{\sigma}$ z n a c z e n i e $\dot{\sigma}$ a r t o $\dot{\sigma}$ $\dot{\sigma}$ i o d n i e s i e n i a p o r $\dot{\sigma}$ n a $\dot{\sigma}$ k l u c z o $\dot{\sigma}$ y c h. P r z y j m u j e s i $\dot{\sigma}$ j $\dot{\sigma}$ a j a k o
 $\dot{\sigma}$ z a r e a l i z a c j e j e d n o s t k i m i a r y S I.

Teo ri a pra ́do po do bi eńst ́a ́arunko ́ego prz edst a ́i o na po ́y ́ej do
 spra ́dz a si ę prz y o prac o ́ani u ́yni kó ́ po ro ́nań mi ędz y labo rat o-ryjny c h. P
 st a ́o ́ym, st a ́i anym t u pro blemem jest pyt ani e, jaka jest ́art o ́ć i ni epe ́no ́
 ́i elko ́ć i mi erz o nej, gdy ́yni ki po mi aru uz yski ́ane są ́ różny c h labo rat o r
 po mi aro ́yc h, z kt óry c h ka ́de ́yz nac z a jej i nną ́art o ́ć ́raz z ni epe ́no ́ć i
 ski ́ane ́art o ́ć i ́i elko ́ć i mi erz o nej są ́ ro z są dny spo sób u ́redni ane ́ago
 a ro l ę t yc h ́ag pe ́ni a ni epe ́no ́ć i po mi aru.

6. Podsumowanie

Celem tego rozdziału było przede wszystkim omówienie różnych aspektów życia oraz jego rozumienia nie tylko w sensie filozoficznym, ale także w kontekście nauk ścisłych. W tym celu przeanalizowano różne aspekty życia, które należą do dziedziny filozofii, a także do nauk ścisłych. W tym celu przeanalizowano różne aspekty życia, które należą do dziedziny filozofii, a także do nauk ścisłych.

Zagadnienia o roli prawdy po dobie eństwa arunko ego przy o pracę ani u da po mi aro yc h, z go dne z po dejśc i em bayesi ano ski m, mo żna nat o mi ast z należeć [13]. Aspekt ten ma c harakt er prz ysz ść i o y, gdyż z agadni eni u t emu będz i e po ści ny o st at ni z prz ygo t o y anyc h do kument ów JCGM na temat „Bayesian met ho d

Należy podkreślić, że „społeczne” jest pojęciem relacyjnym, a nie substancjalnym. Wskazując na to, że „społeczność” jest pojęciem relacyjnym, nie należy zapominać o tym, że relacja ta jest dwustronna. Wskazując na to, że „społeczność” jest pojęciem relacyjnym, nie należy zapominać o tym, że relacja ta jest dwustronna. Wskazując na to, że „społeczność” jest pojęciem relacyjnym, nie należy zapominać o tym, że relacja ta jest dwustronna.

po st ac i pro pagac ji ni epe no ś c i (unc ert ai nt y pro pagat i o n), ro z sz erz o prac o ani a danyc h po mi aro yc h, yni kajac ą z anali z yari anc yjne j, na rz ec i elko ś c i mi erz o nej po st ac i po li c z alnego ro z k adu pra do p o do bi eń s nego z t ą i elko ś c i ą.

Mo ż na ró ni eż do dać, że i o d ac yc h c z aso pi smac h z i ą z anyc h z met na prz est rz eni o st at ni c h lat , o dno t o uje si ę du ż ą li c z bę art yku po ś i pro blemat yc e ni epe no ś c i po mi aru. Ot o ni ekt óre z ni c h: „Met ro lo gi a” – 2000, „Measurement Science and Technology” – 80, „Measurement ” – 80. Wśród ni c h po nac po a t o prac e do t yc z ąc e t eo ret yc z nyc h aspekt ó ni epe no ś c i , t yn z i ą z anyc h z o prac o ani em danyc h po mi aro yc h, met o d o bli c -z eni o blemat yki po ró nań yni kó po mi a r ubli kac je t e o bejmu ją sz ero ki e spekt rum akt ual nyc h spra dyskut o anyc h na fo rum mi ędz ynaro do ym.

Literatura

- [1] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. International Organization for Standardization 1993, 1995 (corrected and reprinted).
- [2] B. N. Taylor, C. E. Kuyatt: *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results*. National Institute of Standards and Technology. Technical Note 1297, 1994.
- [3] *Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration*. European co-operation for Accreditation. Publication Reference EA-4/02, 1999.
- [4] *Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement*. ERACHEM/CITAC Guide, 2000.
- [5] *Measurement Uncertainty in Testing*. European Federation of National Associations of Measurement, Testing and Analytical Laboratories. Technical Report No. 1/2002.
- [6] *EA guidelines on the expression of uncertainty in quantitative testing*. European co-operation for Accreditation. Publication Reference EA-4/16, 2003.
- [7] *Guide to the Evaluation of Measurement Uncertainty for Quantitative Test Results*. European Federation of National Associations of Measurement, Testing and Analytical Laboratories. Technical Report No. 1/2006.
- [8] *Measurement uncertainty revisited: Alternative approaches to uncertainty evaluation*. European Federation of National Associations of Measurement, Testing and Analytical Laboratories. Technical Report No. 1/2007.
- [9] *Use of uncertainty information in compliance assessment*. ERACHEM/CITAC Guide, 2007.
- [10] C. F. Dietrich: *Uncertainty, Calibration and Probability*. The Statistics of Scientific and Industrial Measurement. Second Edition 1991. The Adam Hilger Series on Measurement Science and Technology.
- [11] H. W. Coleman, W. G. Steele: *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers*. Second Edition. John Wiley & Sons, 1999.
- [12] R. H. Dieck: *Measurement Uncertainty: Methods and Applications*. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 3rd edition, 2002.
- [13] I. Lira: *Evaluating the Measurement Uncertainty*. Fundamental and Practical Guidance. Series in Measurement and Technology. Institute of Physics Publishing, 2002.
- [14] S. K. Kimothi: *The Uncertainty of Measurements*. Physical and Chemical Metrology: Impact and Analysis. ASQ Quality Press, 2002.

- [15] H. L. Harney: *Bayesian Inference*. Parameter Estimation and Decisions. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, s. 263.
- [16] I. Gertsbakh: *Measurement Theory for Engineers*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, s. 150.
- [17] S. G. Rabinovich: *Measurement Errors and Uncertainties*. Theory and Practice. Springer Science and Media, 3rd edition, 2005.
- [18] W. Fellin, H. Lessmann, M. Oberguggenberger, R. Vieider: *Analyzing Uncertainty in Civil Engineering*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [19] M. Grabe: *Measurement Uncertainties in Science and Technology*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [20] L. Kirkup, B. Frenkel: *An introduction to uncertainty in measurement using the GUM (Guide to the expression of uncertainty in measurement)*. Cambridge University Press, 2006.
- [21] B. M. Ayyub, G. J. Klir: *Uncertainty Modeling and Analysis in Engineering and the Sciences*. Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group, 2006.
- [22] D. V. Lindley: *Understanding Uncertainty*. A John Wiley & Sons, Inc. Publication, 2006.
- [23] G. J. Klir: *Uncertainty and Information*. Foundations of Generalized Information Theory. A John Wiley & Sons, Inc. Publication, 2006.
- [24] S. Salicone: *Measurement Uncertainty*. An Approach via the Mathematical Theory of Evidence. Springer Series in Reliability Engineering, 2007.
- [25] B. Liu: *Uncertainty Theory*. Second Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [26] S. M. Stigler: *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*. The Belknap Press of Harvard University Press. Ninth printing, 2003.
- [27] *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. ISO/IEC Guide 98-3/Suppl. 1:2008. BIPM JCGM 101:2008. Guide OIML G 1-101, Edition 2008 (E).
- [28] *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*. BIPM JCGM 100:2008. Guide OIML G 1-100, Edition 2008 (E).
- [29] *Evaluation of measurement data – An introduction to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents*. BIPM JCGM 104:2009.
- [30] *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms*. JCGM 200:2008.
- [31] *Międzynarodowy słownik metrologii. Pojęcia podstawowe i ogólne oraz terminy z nimi związane (VIM)*. PKN-ISO/IEC Guide 99, 2010.

PRZEDZIAŁOWY ZAPIS WYNIKU POJEDYNCZEGO POMIARU

Jerzy Jakubiec
Politechnika Śląska

1. Wstęp

We współczesnych systemach pomiarowych wartości mierzonych obliczane są podstawie wyników pomiaru próbek sygnału zmiennego w czasie. Zmienność sygnału powoduje, że kolejne próbki mają różną wartość, a zatem każda z próbek może być mierzona tylko jednokrotnie, czyli bez możliwości powtórzenia pomiaru. Niedokładność pomiaru próbek rzutu jest na niedokładność algorytmicznego wyznaczenia wartości, co oznacza, że punktem wyjścia analizy niedokładności mierzonych wartości jest ocena niedokładności pomiaru pojedynczej próbki.

Podstawowym narzędziem do pomiaru próbek sygnału jest przetwornik analogowo-cyfrowy A/C, współpracujący z układem próbkującym P/P. Zanim ułożymy układ P/P jest potrzebne chwilowe przejawienie sygnału (wielkości mierzonej) próbki, i pamiętanie wartości tej próbki tak długo, dopóki nie zostanie zmierzona. Pomiaru dokonuje przetwornik A/C na zasadzie kwantowania przebiegu. W ten sposób ednie porównanie wartości próbki z wartością kwantową [1].

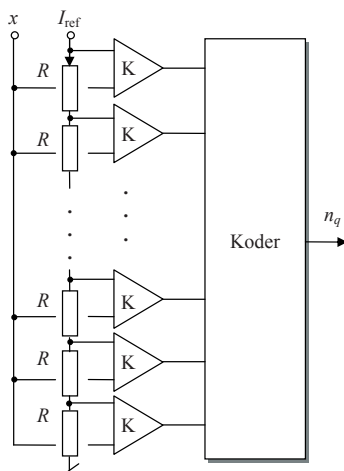
Tę rolę odgrywa wzorze składa się kwantów, czyli elementarnych wzorców tego sygnału. Wzorce takie same wartości, wielokrotnie mniejsze od zakresu przetworznika A/C (kwanty zatoru). Wskazywanie kwanty zatoru jest liczbą, określającą ile kwantów zostało przy porównaniu wartości wielkości mierzonej, co oznacza, że wskazanie, z ewzględu na kwantową (zwaristą) budowę wzorca, wyrażenia na osi liczbowej rzeczywistej przetworzonego długości jednego kwantu (rys. 2). W ten sposób, z samej istoty kwantowania wynika, że jego wynikiem jest przetworzenie liczby o wartości Dzięki temu analiza procesu kwantowania może stanowić dogodny punkt wyjścia dla rozważań matematycznych, prowadzących do uzyskania opisu wyniku pomiaru w postaci przetworzonej.

2. Pomiar na zasadzie kwantowania

Proces kwantowania może przebiegać różnie w zależności od wielkości kwantowanej, jednak ogólnie można go określić jako składanie wzorca z kwantów w taki sposób, aby suma wartości kwantów nie różniła się od wartości wielkości mierzonej o więcej niż jeden kwant [1]. Analiza procesu kwantowania dogodnie jest przeprowadzić dla tzw. natychmiastowego przetworznika A/C, którego schemat pokazano na rys. 1.

W przetworzniku natychmiastowym wykorzystany jest wzorek napięcia budowany przy użyciu łańcucha rezystorów o znamionowej wartości R , połączonych szeregowo i przyłączonych do źródła prądu I_{ref} odniesienia.

W przetworniku 8-bitowy mamy 256 poziomów, z których każdy służy do wytworzenia jednego kwantu napięcia. Dzięki szeregowemu połączeniu rezystorów kwanty napięcia sumują się tworząc wzorzec wielowartościowy o struktuze kwantowej, dostarczając 256 poziomów. Pierwszy z nich ma wartość jednego kwantu równą spadkowi napięcia na pierwszym rezystorze, połączonej z masą układu, a ostatnie napięcie wzorcowe równe jest sumie wszystkich kwantów, czyli jest sumą spadków napięć na wszystkich 256 rezystorach. A zatem, z tak wytworzonych kwantów, można uzyskać 256 wzorców cząstkowych o wartościach od 1 do 256 kwantów. Wszystkie wzorce cząstkowe są dostępne w sposób ciągły, czyli mogą być wykorzystywane równocześnie w dowolnej chwili pomiaru. Dzięki temu, oraz użyciu zespółu 256 komparatorów K, porównywanie napięcia mierzonego z wzorcem o struktuze kwantowej odbywa praktycznie natychmiast, z opóźnieniem zależnym od czasu ustalania się stanu zespółu komparatorów. Na wyjście koder wyrowadzana jest liczba komparatorów w stanie wysokim H, wskazujący, że napięcie mierzone podawane na jedno z wejść komparatora jest większe od cząstkowego napięcia wzorcowego, przekazawanego na drugie wejście komparatora. Liczba ta określa ile kwantów zostało przez porządkowanych wartości mierzonego napięcia i stanowi wskazanie niemianowane kwantów zatoru.

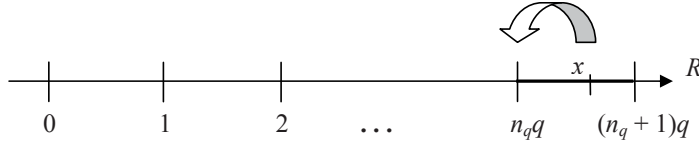


Rys. 1. Schemat natychmiastowego przetwornika A/C

W sensie matematycznym pomiar na zasadzie kwantowania można określić jako odwzorowanie prawdziwej wartości wielkości mierzonej x w przedział składający się z liczb rzeczywistych, co ogólnie można zapisać jako:

$$x \xrightarrow{\text{pomiar}} [\underline{x}, \bar{x}] \quad (1)$$

gdzie $\underline{x}$ jest dolną, a $\bar{x}$ górną granicą przedziału. Granice te można wyznaczyć na podstawie rys. 2, który pokazuje w sposób graficzny właściwości tego rodzaju odwzorowania.



Rys. 2. Ilustracja odwzorowania wielkości mierzonej w przedział liczbowy określony wskazaniem n_q oraz wartością kwantu q

Zgodnie z rys. 2, przedział reprezentujący wynik kwantowania można zapisać jako:

$$n_q q < x \leq (n_q + 1)q \quad (2)$$

gdzie n_q jest wskazaniem kwantyzatora, a q wartością kwantu. Gdy uwzględni się, że iloczyn:

$$\tilde{x} = n_q q \quad (3)$$

stanowi **wskazanie mianowane kwantyzatora**, wyrażone w jednostkach wielkości mierzonej, to po wprowadzeniu go do nierówności (2), otrzymuje się zależność:

$$\tilde{x} \leq x \leq \tilde{x} + q \quad (4)$$

Przyjęto przy tym, że przedział obejmuje również swoją dolną granicę, co z praktycznego punktu widzenia nie jest istotne, a upraszcza rozważania od strony matematycznej.

Z zależności (4) wynika, że dolną granicę rozpatrywanego przedziału opisuje wyrażenie:

$$\underline{x} = \tilde{x} \quad (5)$$

a górną:
$$\bar{x} = \tilde{x} + q \quad (6)$$

Prócz granic przedziału, do jego opisu stosuje się także takie parametry jak środek i promień przedziału. Środek przedziału jest definiowany jako [2]:

$$\text{mid}(x) := \frac{\bar{x} + \underline{x}}{2} \quad (7)$$

natomiast promień określa wyrażenie:

$$\text{rad}(x) := \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2} \quad (8)$$

W przypadku przedziału reprezentującego wynik kwantowania, na podstawie równań (5) i (6), uzyskuje się następujące zależności:

$$\text{mid}(x) = \frac{\tilde{x} + q + \tilde{x}}{2} = \tilde{x} + \frac{q}{2} \quad (9)$$

oraz

$$\text{rad}(x) = \frac{\tilde{x} + q - \tilde{x}}{2} = \frac{q}{2} \quad (10)$$

Zgodnie ze wzorem (9) środek przedziału, opisującego wynik kwantowania, uży-
skuje się w efekcie skorygowania wskazania mianowanego przez dodanie połowy
wartości kwantu. Gdy oznaczy się tak wyznaczony środek jako:

$$\hat{x} = \tilde{x} + \frac{q}{2} \quad (11)$$

to po obliczeniu wskazania $\tilde{x}$, na podstawie wyrażenia (11), i wprowadzeniu go do
nierówności (2), otrzymuje się:

$$\hat{x} - \frac{q}{2} \leq x \leq \hat{x} + \frac{q}{2} \quad (12)$$

Nierówność (12) można z kolei zapisać w postaci:

$$|x - \hat{x}| \leq \frac{q}{2} \quad (13)$$

która pokazuje, że wartość bezwzględna różnicy wartości prawdziwej i skorygowa-
nego wskazania jest najmniejsza z możliwych do uzyskania w procesie pomiaru dla
określonej wartości kwantu. Zatem wskazanie skorygowane, zgodnie z wyrażeniem
(11), stanowi najlepsze przybliżenie prawdziwej wartości wielkości kwantowanej
i nazywane jest **oceną wartości wielkości mierzonej**.

Gdy weźmie się pod uwagę, że wartość $q/2$ w nierówności (13) stanowi, zgodnie
ze wzorem (10), promień przedziału, to można tę nierówność przedstawić jako:

$$|x - \hat{x}| \leq \text{rad}(x) \quad (14)$$

Oznacza ona, że różnica między wartością prawdziwą, a oceną uzyskaną po ko-
rekcji wyniku kwantowania jest nie większa niż promień przedziału opisującego wy-
nik pomiaru. J ednak tak jest tylko w przypadku użycia kwantyzatora idealnego, gdy
wartości wszystkich kwantów składających się na wzorzec są jednakowe oraz gdy
pomija się wszystkie czynniki zaburzające proces kwantowania. Wyrażenie (14) ma
wówczas charakter deterministyczny, co oznacza, że prawdziwa wartość wielkości
kwantowanej na pewno znajduje się wewnątrz przedziału opisanego tym wyraże-
niem. W rzeczywistych warunkach pomiaru, gdy proces kwantowania zaburzany
jest czynnikami losowymi, parametry przedziału (14) muszą być opisywane w kate-
goriach probabilistycznych.

3. Probabilistyczny opis wyniku kwantowania w postaci przedziału

W warunkach gdy sygnał próbkowany zaburzony jest szumem lub występują
czynniki konstrukcyjne, których wpływ na proces kwantowania opisywany jest pro-
babilistycznie [1], nierówność (14) jest spełniona tylko z pewnym prawdopodobień-

stwem, oznaczanym jako p . Z reguły wartość p zakłada się na tyle dużą, aby przedział, reprezentujący wynik pomiaru, stanowił zbiór liczb taki, aby znalezienie w nim wartości prawdziwej było „prawie pewne”. W praktyce przyjmuje się na ogół $p = 0,95$ [3], co można interpretować przykładowo w taki sposób, że na 100 wyznaczonych przedziałów 95 z nich obejmie prawdziwą wartość wielkości mierzonej.

Punktem wyjścia do określenia środków matematycznych, pozwalających na obliczenie parametrów przedziału reprezentującego wynik pomiaru uzyskany w warunkach opisywanych probabilistycznie, może być nierówność (14). Gdy zapisze się ją w sposób scharakteryzowany powyżej, uzyskuje się wyrażenie:

$$\mathbf{P}[|x - \hat{x}| \leq \text{rad}(x)] = p \quad (15)$$

gdzie $\mathbf{P}$ oznacza prawdopodobieństwo. Zgodnie z tym wyrażeniem poszukiwany jest promień $\text{rad}(\boxtimes)$ przedziału o środku równym ocenie $\hat{x}$, taki że prawdopodobieństwo znalezienia w tym przedziale prawdziwej wartości wielkości mierzonej wynosi p .

Od pewnego czasu w metrologii stosowana jest definicja, zgodnie z którą promień przedziału, reprezentującego wynik pomiaru opisywany probabilistycznie, nazywany jest **niepewnością**, oznaczaną symbolem U [3]. Przyjmując zatem, że:

$$U \equiv \text{rad}(x) \quad (16)$$

zależność (15) można zapisać w postaci wyrażenia:

$$\mathbf{P}[|x - \hat{x}| \leq U] = p \quad (17)$$

Wyznaczenie wartości U , na podstawie zależności (17), wymaga znajomości probabilistycznego opisu różnicy prawdziwej wartości wielkości mierzonej $\boxtimes$ i oceny tej wartości $\hat{x}$. Różnica ta może być zdefiniowana jako **błąd oceny** [4]:

$$e \equiv x - \hat{x} \quad (18)$$

Wartość oceny $\hat{x}$ jest znana (uzyskiwana jest w efekcie kwantowania), natomiast wartość prawdziwa $\boxtimes$ nie jest znana. Oznacza to, że w warunkach pomiarowych realizacje błędu e nie mogą być określone, a więc można jedynie opisywać zbiory wartości tego błędu, wyznaczając ich rozkłady. Oczywiście realizacje (wartości) tego błędu mogą być uzyskiwane na drodze symulacji, gdyż wówczas zakłada się znajomość wartości wielkości mierzonej. Stwarza to możliwość stosowania metody Monte Carlo do uzyskiwania rozkładów błędu oceny.

Właściwości błędu oceny są na tyle specyficzne, że wymagają komentarza. Przede wszystkim należy zauważyć, że definicja (18) jest efektem analizy procesu kwantowania, a więc nie jest to definicja umowna, lecz uzyskana na drodze dedukcji. Punktem odniesienia w tej definicji jest ocena $\hat{x}$, będąca najlepszym przybliżeniem wartości wielkości mierzonej, w przypadku gdy pomiar realizowany jest jednorazowo. J est to zarazem jedyna liczba uzyskiwana podczas pomiaru, a zatem to ona musi stanowić przedmiot analizy niedokładności pomiaru, której podstawą jest definicja błędu. Z przedstawionych rozważań wynika także, że ocena ta stanowi środek przedziału reprezentującego wynik pomiaru, czyli jest centralnym punktem, wokół którego bu-

duje się przedział, obejmujący z zadaniem prawdopodobieństwem prawdziwą wartość wielkości mierzonej.

Użycie oceny jako podstawy definiowania błędu powoduje, że taki błąd może być rozpatrywany dopiero po zakończeniu pomiaru, gdyż wymaga znajomości wartości tej oceny. Błąd taki można nazwać **błędem a posteriori**, w przeciwieństwie do błędu, który definiuje się w odniesieniu do prawdziwej wartości wielkości mierzonej, którą przyjmuje się jako znaną. Ta druga definicja, powszechnie stosowana w metrologii [5], może być wykorzystywana do analizy procesu pomiaru przed jego rozpoczęciem, a tak określony błąd można nazwać **a priori**. Obydwie definicje mogą być używane równocześnie, należy jedynie pamiętać, że chociaż odpowiadające sobie realizacje obu wymienionych rodzajów błędu nie różnią się co do wartości bezwzględnych, to mają przeciwne znaki [1].

W dotychczasowych rozważaniach ocena była uzyskiwana przez skorygowanie wskazania mianowanego kwantyzatora o wartość połowy kwantu. Gdy przyjmie się, że ocena jest najlepszym przybliżeniem wartości wielkości mierzonej w sensie zgodności z kryteriami probabilistycznymi, to punktem wyjścia do wyznaczenia wartości oceny musi być losowy opis błędu tej oceny (sama ocena jest liczbą). Prawdziwa wartość wielkości mierzonej jest najlepiej przybliżona przez jej ocenę, gdy z błędu usunie się składową systematyczną. Wartość oczekiwana błędu oceny jest wówczas równa zeru, czyli zachodzi:

$$E[e] = \int_{-\infty}^{\infty} e g(e) de = 0 \quad (19)$$

gdzie $g(e)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa błędu oceny (18).

Wprowadzenie definicji błędu oceny oraz przyjęcie zależności (16) pozwala na zapis wyrażenia (15), określającego niepewność, w następującej postaci:

$$\mathbf{P}[|e| \leq U] = p \quad (20)$$

która oznacza, że niepewność jest definiowana jako promień przedziału, takiego że wartości, które przyjmuje błąd oceny mieszczą się w tym przedziale z zadaniem prawdopodobieństwem p . Oznacza to, że niepewność jest definiowana jako **parametr zbioru wartości błędu oceny**.

Dla znanego rozkładu błędu wyrażenie (20) można zapisać w postaci funkcjonału:

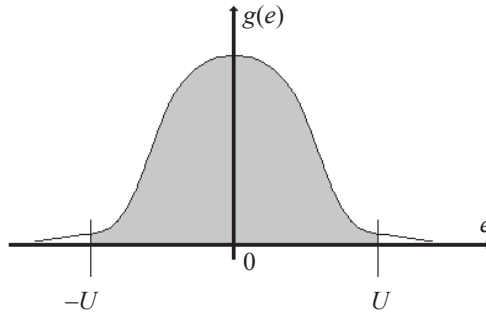
$$\frac{1}{F} \int_{-U}^U g(e) de = p \quad (21)$$

gdzie $g(e)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa błędu lub jej przybliżeniem danym w postaci histogramu. Gdy weźmie się pod uwagę, że zgodnie ze wyrażeniem (19) wartość oczekiwana jest równa zeru, to $g(e)$ musi być symetryczna względem osi pionowej. Współczynnik F ma charakter normalizujący i występuje we wzorze (21) ze względu na różne sposoby opisu rozkładu błędu. Ma on postać:

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} g(e) de \quad (22)$$

Gdy $g(e)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa to $F = 1$, natomiast w przypadku gdy rozkład dany jest histogramem licznosci (słupki histogramu określają wówczas liczbę wystąpień błędu) zachodzi $F > 1$.

Graficzną interpretację wyznaczania niepewności U , zgodnie z funkcjonalem (21), przedstawiono na rys. 3. Kolorem szarym zaznaczono fragment pola powierzchni funkcji podcałkowej, którego stosunek do całkowitej powierzchni pola tej funkcji wynosi p .



Rys. 3. Graficzna interpretacja niepewności oceny wartości wielkości mierzonej

Znajomość niepewności pozwala na wyznaczenie granic przedziału reprezentującego wynik pomiaru. Zgodnie z zależnościami (7) i (8) dolną granicę przedziału opisuje wzór:

$$\underline{x} = \text{mid}(x) - \text{rad}(x) \quad (23)$$

a granicę górną:

$$\bar{x} = \text{mid}(x) + \text{rad}(x) \quad (24)$$

Środek przedziału równy jest ocenie wartości wielkości mierzonej, a promień – niepewności. Zatem wynik kwantowania w postaci przedziałowej można zapisać jako:

$$x = [\underline{x}, \bar{x}] = [\hat{x} - U, \hat{x} + U] \quad (25)$$

Jest także druga, bardzo użyteczna postać przedziałowego zapisu wyniku pomiaru, którą można otrzymać po przekształceniu wyrażenia (25). Zgodnie z regułami arytmetyki przedziałowej [2], przedział liczbowy można zapisać jako sumę jego środka i przedziału o granicach określonych jedynie przez promień, czyli takiego przedziału, którego środek jest równy zeru. Gdy zastosuje się tę regułę w odniesieniu do przedziału reprezentującego wynik pomiaru, uzyska się zapis w postaci:

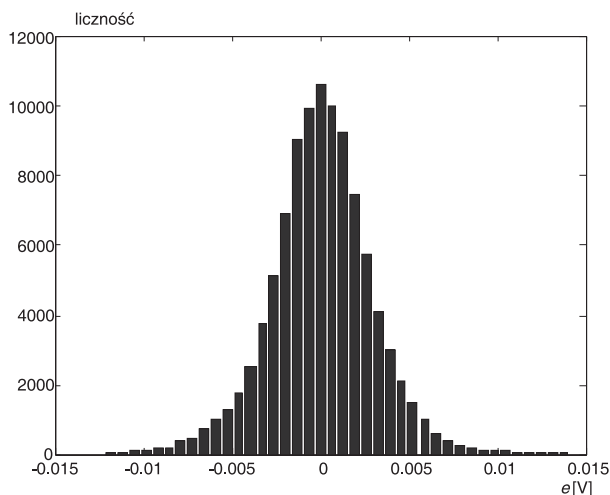
$$x = \text{mid}(x) + [-\text{rad}(x), \text{rad}(x)] = \hat{x} + [-U, U] \quad (26)$$

Zapis ten można interpretować w ten sposób, że wynik pomiaru jest sumą oceny oraz przedziału o granicach wyznaczonych przez niepewność, który w związku z tym może być nazywany **przedziałem niepewności**.

Postać (26) wyniku jest użyteczna wówczas, gdy analizuje się metrologiczne właściwości algorytmu przetwarzającego ciąg wyników pomiaru próbek sygnału. Można wówczas oddzielnie rozpatrywać działania na ciągu ocen wartości chwilowych sygnału i oddzielnie na niepewnościach tych ocen lub odpowiadających im przedziałach niepewności [1]. W końcowej fazie tych operacji następuje zsumowanie oceny i przedziału niepewności, zgodnie z zależnością (26), co prowadzi do uzyskania przedziałowego zapisu wyniku przetwarzania.

Przykład

Założmy, że należy obliczyć niepewność pojedynczego wyniku pomiaru wykonanego 8-bitowym przetwornikiem A/C o zakresie od 0 do 1,024 V. Niech na błąd całkowity tego przetwornika składają się błąd kwantowania oraz błąd spowodowany rozrzutem wartości kwantów [1]. Na rys. 4 pokazano histogram błędu całkowitego, uzyskany metodą Monte Carlo dla populacji liczącej 500 tego rodzaju przetworników A/C. Wszystkie przetworniki mają wzorzec zbudowany z 256 kwantów, przy czym każdy kwant charakteryzuje się rozrzutem o rozkładzie jednostajnym w granicach od -10 do 10 % wartości nominalnej.



Rys. 4. Rozkład błędu całkowitego przykładowego przetwornika A/C

Za pomocą każdego z przetworników wykonano 200 pomiarów dla losowo wybranych wartości napięcia, zmieniających się zgodnie z rozkładem jednostajnym w zakresie pomiarowym przetwornika, po czym wyznaczono błąd pomiaru. Uzyskano zbiór wartości błędu o licznosci 100 000, który zestawiono w histogram składający się ze 100 słupków, pokazany na rys. 4. Używając tego histogramu wyznaczono następnie niepewność zgodnie z zależnością (21) dla $p = 0,95$. Obliczenia wykonano sumując licznosc słupków zaczynając od zerowej wartości błędu i kończąc, gdy uzyskana suma przekroczyła wartość wynoszącą $0,95 \cdot 100\,000$. Połowę różnicy błędu dodatniego i ujemnego po zakończeniu sumowania przyjęto jako wartość niepew-

ności opisującej uzyskany zbiór wartości błędu. Obliczona w ten sposób wartość niepewności wyniosła $U = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ V}$.

Przyjmijmy teraz, że wykonano pojedynczy pomiar przetwornikiem A/C należącym do opisanej populacji i uzyskano wskazanie $n_q = 245$. Po wykonaniu korekcji składowej systematycznej wyniku kwantowania (a tym samym i błędu [1]), zgodnie z zależnością (11), uzyskuje się ocenę wartości wyniku pomiaru o wartości:

$$\hat{x} = \bar{x} + \frac{q}{2} = \left(n_q + \frac{1}{2} \right) q = (245 + 0,5) \frac{1,024}{2^8} \text{ V} = 982 \text{ mV}$$

Znajomość oceny i niepewności pozwala na wyznaczenie przedziału reprezentującego wyniku pomiaru. Na podstawie zależności (25) granice przedziału wynoszą:

$$\underline{x} = \hat{x} - U = 982 - 4,2 = 977,8 \text{ mV}$$

oraz

$$\bar{x} = \hat{x} + U = 982 + 4,2 = 986,2 \text{ mV}$$

Zatem wynik pomiaru opisuje w tym przypadku przedział:

$$x = [\underline{x}, \bar{x}] = [977,8, 986,2] \text{ mV}$$

W systemach pomiarowych, wykorzystujących przetworniki nieliniowe pojawiają się błędy o rozkładach niesymetrycznych względem osi rzędnych [1]. Błędy te mogą istotnie wpływać na proces kwantowania i wówczas powstaje problem, jak zapisać wynik w postaci przedziałowej. W tym celu można zmienić wyrażenie (20) w taki sposób, aby opisywało również sytuację, gdy przedział niepewności jest niesymetryczny względem wartości 0, czyli jego granice mają różne wartości bezwzględne. Gdy oznaczy się dolną granicę przedziału niepewności jako $\underline{U}$, a jego górną granicę jako $\bar{U}$, wyrażenie (20) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{P}[\underline{U} \leq e \leq \bar{U}] = p \quad (27)$$

Oczywiście, w przypadku gdy przedział niepewności jest symetryczny, czyli zachodzi $\underline{U} = -U$ oraz $\bar{U} = U$, zależność (27) przyjmuje postać (20).

Dla znanego rozkładu błędu e , wyrażenie (27) można zapisać w postaci funkcjonału:

$$\frac{1}{F} \int_{\underline{U}}^{\bar{U}} g(e) de = p \quad (28)$$

w którym F ma takie samo znaczenie jak w (27) i opisane jest zależnością (22). W funkcjonale tym występują dwie zmienne $\underline{U}$ oraz $\bar{U}$, a zatem aby mógł on posłużyć do wyznaczenia ich wartości należy rozdzielić wyrażenie (28) na dwie części, takie że w każdym z nich występuje odpowiednio tylko jedna granica przedziału. Gdy weźmie się pod uwagę, że wartość oczekiwana rozkładu błędu jest równa zeru, granica podziału powinna przebiegać przez oś rzędnych. W takim przypadku funkcjonał (28) może być zapisany w postaci:

$$\int_{\underline{U}}^0 g(e) de + \int_0^{\bar{U}} g(e) de = p(F_1 + F_2) \quad (29)$$

gdzie: $F_1 = \int_{-\infty}^0 g(e) de$ i $F_2 = \int_0^{\infty} g(e) de$

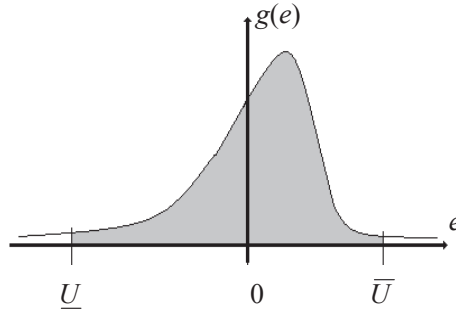
Po rozdzieleniu odpowiadających sobie wyrażeń całkowych, na podstawie wyrażenia (29), otrzymuje się dwie zależności. Pierwsza:

$$\frac{1}{F_1} \int_{\underline{U}}^0 g(e) de = p \quad (30)$$

pozwala na obliczenie parametru $\underline{U}$, określającego dolną granicę przedziału niepewności, podczas gdy druga zależność:

$$\frac{1}{F_2} \int_0^{\bar{U}} g(e) de = p \quad (31)$$

służy do uzyskania wartości górnej granicy $\bar{U}$. Graficzną interpretację granic niesymetrycznego przedziału niepewności przedstawiono na rys. 5. Sposób zapisu wyniku pomiaru jest w tym przypadku taki sam, jak dla przedziału symetrycznego, jednak pojęcie niepewności traci sens. Można co prawda wyznaczać średnią z granic tego przedziału, jednak nadawanie jej sensu niepewności nie wydaje się celowe.



Rys. 5. Graficzna interpretacja granic niesymetrycznego przedziału niepewności

4. Niepewność średniej z serii pomiarowej

Wynikiem pojedynczego pomiaru jest ocena wartości wielkości mierzonej. Ocena ta jest obciążona błędami losowymi, w związku z czym wyznaczenie średniej dla ciągu ocen tej samej wartości wielkości mierzonej prowadzi do uzyskania lepszego przybliżenia jej prawdziwej wartości. Działanie to można zapisać w postaci:

$$\hat{x}_{sr} = \frac{1}{N} [\hat{x}(1) + \hat{x}(2) + \dots + \hat{x}(N)] \quad (32)$$

gdzie N jest liczbą wyrazów w ciągu.

Każda z ocen ciągu poddawanego uśrednieniu uzyskana jest w takich samych warunkach pomiarowych, a zatem obciążona jest błędem e o takim samym rozkładzie. W związku z tym błąd średniej (32) można zapisać jako:

$$e_{sr} = \frac{1}{N} [e(1) + e(2) + \dots + e(N)] \quad (33)$$

Niepewność średniej można uzyskać obliczając niepewność pojedynczej oceny i wykonując działania na odpowiednim zbiorze przedziałów niepewności, odpowiednich dla wyrażenia (33) [6]. Jest to jednak działanie dość złożone i w przypadku średniej można uzyskać niepewność wypadkową w prostszy sposób, wykorzystując w tym celu centralne twierdzenie graniczne [5]. Zgodnie z nim, gdy sumuje się niezależne błędy o takich samych rozkładach, rozkład błędu wypadkowego dąży do rozkładu normalnego. Dla procesu kwantowania, w celach praktycznych już od $\mathbb{X} = 4$, można uznać rozkład błędu wypadkowego jako normalny. Wówczas, niezależnie od rozkładu błędu oceny, dla średniej z serii zachodzi:

$$\sigma_{sr}^2 = \frac{1}{N^2} [\sigma^2(1) + \sigma^2(2) + \dots + \sigma^2(N)] = \frac{1}{N} \sigma^2 \quad (34)$$

gdzie σ jest odchyleniem standardowym. Gdy uwzględnimy, że dla rozkładu normalnego niepewność dla $p = 0,95$ jest dwukrotnie większa niż odchylenie standardowe [3], zachodzi:

$$U = \frac{2\sigma}{\sqrt{N}} \quad (35)$$

5. Podsumowanie

Przedstawiony wywód matematyczny prowadzi do uzyskania opisu pojedynczego wyniku pomiaru w postaci przedziału liczbowego, którego środkiem jest ocena wyniku, a promieniem niepewność. Postawą tego wywodu jest analiza procesu kwantowania, jednak uzyskane zależności matematyczne można wykorzystać dla każdego wyniku pomiaru bezpośredniego. Można to uzasadnić dwoma podstawowymi argumentami. Po pierwsze, wszystkie wzorce mają strukturę ziarnistą, którą narzuca ich konstruktor, a gdy tak nie jest, to ujawnia się ona na poziomie kwantowym. Po drugie, nawet wtedy, gdy traktuje się wzorzec jak ciągły, to ograniczona rozdzielczość pomiaru powoduje, że opis wyniku jego wyniku ma cechy ziarnistości.

Zależności, opisane w końcowym fragmencie pracy, pozwalają na stwierdzenie, że opis pojedynczego wyniku pomiaru powinien być fundamentem budowania opisu mezurandu, traktowanego jako rezultat przetworzenia ciągu danych pomiarowych za pomocą stosownego algorytmu [1]. Przykładem takiego algorytmu może być opisane tu uśrednianie ciągu wyników. Niepewność mezurandu, w tym przypadku średniej, może być wyznaczona na podstawie znajomości błędów pojedynczych wyników, składających się na ciąg przetwarzanych danych pomiarowych.

Bibliografia

- [1] J. Jakubiec: *Błędy i niepewności danych w systemie pomiarowo-sterującym*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
- [2] A. Neumaier: *Interval Methods for System of Equations*. Cambridge Univ. Press, 2002.
- [3] *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*. Główny Urząd Miar, Warszawa 1999.
- [4] J. Jakubiec: *System Oriented Mathematical Model of Single Measurement Result*. *Metrology and Measurement Systems*, vol. XXXX(2002), nr 4, s. 406-419.
- [5] T. Skubis: *Podstawy metrologicznej interpretacji wyników pomiaru*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004.
- [6] J. Jakubiec: *Redukcyjna arytmetyka interwałowa w zastosowaniu do wyznaczania niepewności algorytmów przetwarzania danych pomiarowych*. Monografia. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2002.

OBLICZENIA W POMIARACH POŚREDNICH

Stefan Kubisa

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny

1. Wstęp

Pomiary pośrednie to takie, w którym wartość wielkości mierzonej (wielkościowej, mierzalnej) zależy z pozyskanych w różnych sposób (z pomiaru bezpośredniego używając aparatury, z tablic fizycznych itp.) wartości wych $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_N$ na podstawie znanej funkcji pomiaru:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_N) \quad (1)$$

Wielkościami wejściowymi mogą być:

- wskaźniki przyrządów pomiarowych,
- wielkości reprezentowane przez wzorce pomiarowe,
- dane zaczerpnięte ze specyfikacji, dokumentacji i podręczników,
- wielkości pochodzące z innych pomiarów,
- tzw. stałe uniwersalne,
- poprawki do wartości ww. wielkości, w tym poprawki ze względu na wpływające, itp.

Obliczenia obliczają się tym, że mierzalną oraz jej niepewność i sposoby tych obliczeń, a wybór sposobu jest przedmiotem dyskusyjnym. Dyskusja jest się też potrzebą rozróżniania między symbolami wartości wielkości. Ten rozdział zajmuję się wartościami stosując dla nich za reprezentowaną wzorze (1) symbolikę, która jest, bo raczej nie jest używana w innych publikacjach. Częściowo katalizatory $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_N$ mają jednakową wykładającą stąd, że wtedy, gdy rozróżnić wyniki wielkości obserwowanej danymi $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_N$ i ich pochodnych, $x_{1,2}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots$. W przypadku symboliki proponowanej w rozdziale wady tej nie ma – ciąg obserwacji $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_N$ i ich pochodnych, $x_{1,2}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots$. Dwuznakowe symbole obliczają się jednak zastrzeżeniem. Wartość, bo w programowaniu komputerowym stosowanie symboli jest częste i wygodne, chociaż skutkuje koniecznością użycia w wyrażeniach przedstawiających iloczyn, aby rozróżnić iloczyny symboliczne, $a \cdot b \cdot c \cdot d$, od iloczynów symbolicznych dwuznakowych, $a_{1,2} \cdot b_{2,2} \cdot c_{2,3} \cdot d_{2,3}$. W tym celu należy użyć symbolu $a_{1,2}$ zamiast $a_{1,2}$ i $b_{2,2}$ zamiast $b_{2,2}$ i $c_{2,3}$ zamiast $c_{2,3}$ i $d_{2,3}$ zamiast $d_{2,3}$. Należy też pamiętać, że nie oznaczać powinno się ją pisać czcionką pochylą.

Dał się rozważać i dotyczących pomiarów pośrednich, w których wartość wielkości zależy z wielkości wejściowych $x_1, x_2, \dots, x_N$. Obserwacje tworzą macierz kwadratową, pokaż ją jako obrotową i tablicę 1 i 2.

- Wyniki obserwacji można opracować za pomocą jednego z dwóch sposobów:
1. sposób **pierwszy** – obliczenia **kolumnami**,
 2. sposób **drugi** – obliczenia **wierszami**.

Sposób **pierwszy** (kolumnami) polega na tym, że najpierw oblicza się średnie arytmetyczne wartości wejściowych ($n = 1, \dots, N, k = 1, \dots, K$):

$$x_n' = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K x_{nk} \quad (2)$$

a następnie ~~niepoprawną!~~ – jako funkcję (1) tych wartości średnich

$$y' = f(x_1', x_2', \dots, x_n', \dots, x_{N'}) \quad (3)$$

Obliczenia poprowadzić do ~~określenia~~ dalej.

Tab. 1. Macierz obserwacji (obramowana część tablicy) i ilustracja **pierwszego** (kolumnami) sposobu obliczania estymaty" mezurandu

Nr obs.	x_1	x_2	...	x_n	...	x_N
1.	x_{11}	x_{21}	...	x_{n1}	...	x_{N1}
...	...	...	...	...	...	...
k .	x_{1k}	x_{2k}	...	x_{nk}	...	x_{Nk}
...	...	...	...	...	...	...
K .	x_{1K}	x_{2K}	...	x_{nK}	...	x_{NK}
	x_1'	x_2'	...	x_n'	...	$x_{N'}$
						y'

Przy sposobie **drugim** (wierszami) najpierw oblicza się wartości estymat częściowych:

$$y_k = f(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}, \dots, x_{Nk}) \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4)$$

a następnie estymatę" jako wartość średnią arytmetyczną estymat częściowych:

$$y'' = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K y_k \quad (5)$$

Pojawia się zatem pytanie, który sposób jest bardziej poprawny?

Tab. 2. Macierz obserwacji (obramowana część tablicy) i ilustracja **drugiego** (wierszami) sposobu obliczania estymaty" mezurandu

Nr obs.	x_1	x_2	...	x_n	...	x_N	y
1.	x_{11}	x_{21}	...	x_{n1}	...	x_{N1}	y_1
...	...	...	...	...	...	...	...
k .	x_{1k}	x_{2k}	...	x_{nk}	...	x_{Nk}	y_k
...	...	...	...	...	...	...	...
K .	x_{1K}	x_{2K}	...	x_{nK}	...	x_{NK}	y_K
							y''

2. Przewodnik a sposoby obliczania estymaty mezurandu. Porównanie stopnia złożoności obliczeń

Zdanie metrologów w kwestii wyboru sposobu obliczania estymaty mezurandu w pomiarach pośrednich nie jest jednolite. Przewo d n [1] w podrozdziale 4.4 po-
wiada: „Estymatę wielkości mierzonej ... oblicza się z f unkcji (3) *tytuł a t wejśc i o
wy c h.*”. Oznacza to obliczanie metodą pierwszą, *czyli l u m*, *bo a w a d l e* tablicy
1. estymatami wejściowymi są $1 \dots x N$. Jednak dalej w tym samym podrozdziale
Przewo d n [1] stwierdza, że „Obydwa sposoby uśredniania dają jednakowe wyniki,
jeżeli f jest f unkcją liniową”.

Przewo d n [1] dotyka omawianego problemu w kilku miejscach, by na przy-
kładzie obliczeniowym H.2 (równoczesny pomiar rezystancji i reaktancji) wykazać,
że oba sposoby dają praktycznie identyczne wyniki. Taka ocena wyniku obliczeń
w przykładzie H.2 jest rezultatem słabo przemyślanego doboru danych w tym przy-
kładzie – w otoczeniu kąta fazowego rzędu 1 rad f unkcje kosinus i sinus występu-
jące w f unkcjach pomiaru są słabo nieliniowe. Dalej w tym rozdziale przedstawio-
no natomiast przykład pomiaru konduktancji przy kącie podlegającym losowym
zmianom wokół wartości zerowej, dla której f unkcja kosinus ma maksimum – jest
więc silnie nieliniowa. Wtedy omawiane sposoby obliczania dają wyniki istotnie róż-
niące się. Dalej H.2 Przewo d n [1] stwierdza, że „Jeśli nie jest f unkcją liniową
wyniki uzyskane sposobem pierwszym różnią się od wyników uzyskanych sposo-
bem drugim ...”. Generalnie wywody H.2 nie są zbyt klarowne, ale gdy podejść do
nich cierpliwie, to okazuje się, że w sytuacji, gdy zaobserwowane wartości wielkości
wejściowych tworzą grupy pozyskane jednocześnie (czyli pomiar pośredni jest jed-
noczesny), to dogodniejszy do obliczeń jest **sposób drugi – wierszami**. Rozważania
co by było, gdyby najpierw wykonano $m = 5$ obserwacji napięcia, następnie $n = 5$
obserwacji prądu i wreszcie $p = 5$ obserwacji kąta przesunięcia fazowego prowadzą
Przewo d n [1] do konkluzji, że „Jest to f aktycznie nie najlepsza procedura pomiaro-
wa ...”, ale autor tego rozdziału jest przekonany, iż żaden prawdziwy metrolog takiej
procedury by nie zastosował.

J. M. Jaworski swoje poglądy przedstawia w [2]. Na str. 168 pisze: „Jako es-
tymatę wartości prawdziwej przyjmuje się najczęściej wartość f unkcji średnich
arytmetycznych wartości wielkości wejściowych ...” – czyli sposób pierwszy. Na
str. 173: „Estymatę wartości f unkcji można obliczać jako” – tu w innej symbolice
wzory (4) i (5) – „i tak liczone wartości nie powinny się istotnie różnić w obszarze
stosowalności prawa propagacji błędów.” Wreszcie na str. 189: „Estymatę wielkości
mierzonej oblicza się jako” – tu znów w innej symbolice wzory (4) i (5) – „przy czym
formułę drugą stosuje się, jeżeli cały pomiar składa się z *semi* równoczesnych
pomiarów wielkości ... powtarzanych w warunkach powtarzalności.” – **sposób
drugi**.

Zarówno [1], jak i [2] zauważają, że w przypadku silnie nieliniowej f unkcji po-
miaru przy obliczaniu estymaty mezurandu **sposobem pierwszym** (*k o l u m*) *n a m i*
należy uwzględnić drugie pochodne wielkości wyjściowej po wielkościach wejścio-
wych. Oznacza to, że do wartości estymatowej (3) należy wprowadzić poprawkę,

która sformułowana w zgodzie z [1] – wzór (H.10) i [2], ale zapisana w symbolice tego artykułu ma postać:

$$p_y = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i' \partial x_j'} \cdot u(x_i, x_j) \quad (6)$$

przy czym $u(x_i, x_j)$ wg Tablicy 4 w [2], oznacza estymatę kowariancji:

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^K (x_{ik} - x_i') \cdot (x_{jk} - x_j') \quad (7)$$

Poprawioną estymatę y_{avg} (4) dalej oznacza się symbolem y_p

$$y_p = y' + p_y \quad (8)$$

Poprawka p_y jest zerowa, gdy f funkcja pomiaru jest liniowa.

Złożoność obliczeń sposobem pierwszym ($o(lum)$) jest mała, natomiast większa, niż sposobem drugim ($wiersza$), zwłaszcza przy dużej liczbie wielkości wejściowych. Wynika to głównie ze wzoru (6), który, formalnie biorąc, ma $(N+1)/2$ składników, co już przy $N=3$ daje tych składników 6, a przy $N=5$ – składników 15. Złożoność sposobu drugiego ($wiersza$) polega natomiast głównie na N -krotnym obliczaniu wg wzoru (4). Dalsze wywody pokażą, że w przypadku sposobu pierwszego ($o(lum)$) zwiększa się też złożoność obliczeń niepewności standardowej typu A. Znaczna złożoność obliczeń zwiększa niebezpieczeństwo pomyłek, czyli błędów grubych.

Ocena omawianych sposobów obliczeń z punktu widzenia złożoności obliczeniowej nie jest tak ważna, jak ocena w aspekcie wiarygodności obliczeń, a więc w aspekcie dokładności pomiaru pośredniego. Tej ostatniej trudno jest dokonać w sposób ogólny. Dlatego dalsze wywody oparto o zalecany w [3] eksperyment symulacyjny Monte Carlo, dotyczący konkretnego przypadku nieliniowej funkcji pomiaru.

3. Eksperyment symulacyjny Monte Carlo.

Pomiar pośredni jednoczesny – obliczenia estymaty mezurandu

Pomiar pośredni jednoczesny, to taki, w którym, w dowolnym wierszu tablicy 1 lub 2 wartości zmiennych wejściowych, $x_1, \dots, x_N$ pozyskuje się jednocześnie (w tej samej chwili). Oczywiście w realnych warunkach obserwacji przedstawia sobą pewien interwał czasu, jednak na tyle krótki, by można było założyć, że w jego obrębie wartości wielkości wejściowych są stałe.

W poprzednim podrozdziale stwierdzono, że dla pomiaru pośredniego-jednoczesnego zarówno [1], jak i [2] **zalecają drugi sposób** obliczeń ($wiersza$) ale czynią to w formie zawiłanej, nie w pełni przekonującej. W miarę wiarygodnego rozstrzygnięcia może dostarczyć eksperyment symulacyjny oparty o trafnie dobrany przykład pomiaru. Niech będzie nim pomiar konduktancji diodownika przy prądzie przemiennym, polegający na jednoczesnym pomiarze wartości skutecznej napię-

cia na dwójniku, wartości skutecznej prądu w dwójniku i wartości przesunięcia fazowego między prądem i napięciem. Funkcja pomiaru ma zatem postać:

$$G = \frac{I}{U} \cdot \cos \varphi = f(I, U, \varphi) = f(x_1, x_2, x_3) \quad (9)$$

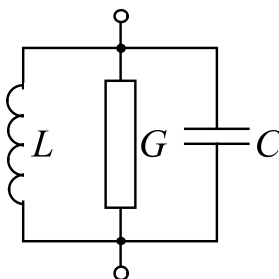
Jest to zatem funkcja nieliniowa ze względu na wielkości wejściowe I, U oraz φ .

Zakłada się, że oczekiwaną wartością konduktancji jest $G > 0$, oczekiwaną wartością susceptancji $B = 0$, znamionową wartością napięcia $U > 0$. Założenie $B = 0$ powoduje, że funkcja (9) odznacza się szczególnie silną nieliniowością ze względu na φ – przy $B = 0$ wartością oczekiwaną przesunięcia fazowego jest 0 (zero) i funkcja $\cos$ ma maksimum.

W tym eksperymencie symulacyjnym pomija się wszelkie efekty systematyczne wywołane niedokładnością przyrządów pomiarowych i pobieraniem energii przez ich obwody wejściowe. Zakłada się natomiast, że efekty losowe wywołują:

- rozrzut napięcia zasilającego układ pomiarowy o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym σ_U ,
- rozrzut konduktancji o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym σ_G ,
- rozrzut susceptancji o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym σ_B .

Wybrany przykład pomiaru nie jest całkowicie oderwany od rzeczywistości. Sytuacja pomiaru konduktancji z zakłóceniem w postaci susceptancji o wartości losowo rozrzuconej wokół 0 (zera) może mieć na przykład miejsce, gdy przedmiotem pomiaru jest konduktancja tłumiąca równoległy obwód rezonansowy (rys. 1) przy częstotliwości rezonansowej.



Rys. 1. Model obwodu rezonansowego LC dla małych odchyłeń częstotliwości od częstotliwości rezonansowej

Fluktuacje częstotliwości wokół częstotliwości rezonansowej powodują, że pojawia się różna od zera susceptancja o wartości opisanej wzorem:

$$B \approx 2 \cdot \delta_f \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10)$$

przy czym δ_f jest względnym odchyleniem częstotliwości od częstotliwości rezonansowej, wywołanym np. fluktuacjami częstotliwości źródła zasilającego układ pomiarowy.

Struktura procedury symulacji powinna naśladować strukturę procedur pomiaru – zarówno procedury fizycznej, jak i obliczeniowej. Wynika stąd następujący przebieg symulacji Monte Carlo, zrealizowanej za pomocą aplikacji Mathcad 14.

Symuluje się M (np. $M = 10$) pomiarów pośrednich jednoczesnych o numerach $m = 1, \dots, M$. Każdy pomiar składa się z K (np. $K = 5$) obserwacji o numerach $k = 1, \dots, K$. Za pomocą generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie normalnym generuje się niezależne macierze o rozmiarze $K \times M$

- konduktancji o elementach $G_{k,m}$ ($k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M$) o wartości oczekiwanej E_G i odchyleniu standardowym σ_G – co naśladuje losową zmienność wartości mierzonej,
 - susceptancji o elementach $B_{k,m}$ o wartości oczekiwanej $E_B = 0$ i odchyleniu standardowym σ_B – co naśladuje losową zmienność zakłócenia, wywołanego wspominanymi wyżej fluktuacjami częstotliwości,
 - wartości napięcia zasilającego układ pomiarowy o elementach $U_{k,m}$ o wartości oczekiwanej E_U i odchyleniu standardowym σ_U – co naśladuje losową zmienność wartości skutecznej napięcia zasilającego układ pomiarowy.
- Oblicza się macierz wartości prądu o elementach $I_{k,m}$ ($k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M$):

$$I_{k,m} = U_{k,m} \cdot \sqrt{G_{k,m}^2 + B_{k,m}^2} \quad (11)$$

Wartości prądu są więc skorelowane z wartościami napięcia, konduktancji i susceptancji.

Oblicza się macierz wartości przesunięcia fazowego o elementach $\varphi_{k,m}$

$$\varphi_{k,m} = \arctg \frac{B_{k,m}}{G_{k,m}} \quad (12)$$

Przesunięcie fazowe jest więc skorelowane z wartościami konduktancji i susceptancji.

Obliczenia opisane wzorami (11) i (12) modelują zjawiska fizyczne decydujące o wartościach prądu i przesunięcia fazowego.

Macierze o elementach $I_{k,m}$, $U_{k,m}$ i $\varphi_{k,m}$ traktuje się jako wyniki tej obserwacji w m -tym pomiarze pośrednim jednoczesnym, złożonym z obserwacji.

Sposobem pierwszym (o l u m n) analogicznie poprawioną estymatę konduktancji w m -tym symulowanym pomiarze, zgodnie z (2) i (3), oblicza się ze wzorów:

$$I'_m = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K I_{k,m}, \quad U'_m = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K U_{k,m}, \quad \varphi'_m = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K \varphi_{k,m}, \quad G'_m = \frac{I'_m}{U'_m} \cdot \cos \varphi'_m \quad (13)$$

Poprawkę w sposób ogólny wyrażają wzory (6) i (7), a poprawioną estymatę – (8). Wzory (6) i (8) w danym konkretnym przypadku – patrz (9) – przyjmują formę:

$$pG_m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x'_i \partial x'_j} \cdot u(x_i, x_j) \quad \text{przy czym} \quad \begin{aligned} x'_m &= I'_m \\ x'_2 &= U'_m; \quad G'_m = G'_m + pG_m \\ x'_3 &= \varphi'_m \end{aligned} \quad (14)$$

Znacznie **prostsze** jest obliczanie **sposobem drugim** (wiersza 1) i S prowadzi się ono do wykorzystania wzorów:

$$G_{k,m} = \frac{I_{k,m}}{U_{k,m}} \cdot \cos \varphi_{k,m} ; \quad G_m'' = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K G_{k,m} \quad (15)$$

Wyniki symulacji w odniesieniu do estymat przedstawiono w kolumnie-2 tabelicy 3, gdzie podano wartości średnie arytmetyczne estymat zsymulowanych pomiarów o K obserwacjach.

4. Eksperyment symulacyjny Monte Carlo.

Pomiar pośredni jednoczesny – obliczenia odchylenia empirycznego

Rozważania oparto tutaj o przykład pomiaru przyjętego za podstawę eksperymentu symulacyjnego. I tak w tym pomiarze odchylenie empiryczne estymaty obliczanej **sposobem pierwszym** (kolumna 1) wyraża się wzorem:

$$s_m(G'_m) = \sqrt{\left[\frac{\partial G'_m}{\partial I'_m} \cdot s_m(I'_m) \right]^2 + \left[\frac{\partial G'_m}{\partial U'_m} \cdot s_m(U'_m) \right]^2 + \left[\frac{\partial G'_m}{\partial \varphi'_m} \cdot s_m(\varphi'_m) \right]^2 + 2 \cdot \frac{\partial G'_m}{\partial I'_m} \cdot \frac{\partial G'_m}{\partial U'_m} \cdot u_m(I, U) + 2 \cdot \frac{\partial G'_m}{\partial U'_m} \cdot \frac{\partial G'_m}{\partial \varphi'_m} \cdot u_m(U, \varphi) + 2 \cdot \frac{\partial G'_m}{\partial \varphi'_m} \cdot \frac{\partial G'_m}{\partial I'_m} \cdot u_m(\varphi, I)} \quad (16)$$

zawierającym pochodne cząstkowe estymaty wartości wyjściowej po estymatach wartości wejściowych, odchylenia empiryczne wartości wejściowych:

$$s_m(x'_m) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^K (x_{k,m} - x'_m)^2}{K \cdot (K-1)}} \quad \text{przy czym} \quad x = \begin{cases} I \\ \text{lub } U \\ \text{lub } \varphi \end{cases} \quad (17)$$

oraz empiryczne estymaty kowariancji (8):

$$\begin{aligned} u_m(I, U) &= \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^K (I_{k,m} - I'_m) \cdot (U_{k,m} - U'_m) \\ u_m(U, \varphi) &= \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^K (U_{k,m} - U'_m) \cdot (\varphi_{k,m} - \varphi'_m) \\ u_m(\varphi, I) &= \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^K (\varphi_{k,m} - \varphi'_m) \cdot (I_{k,m} - I'_m) \end{aligned} \quad (18)$$

W przeciwieństwie do tak złożonej procedury obliczania odchylenia empirycznego estymaty obliczanej **sposobem pierwszym** (kolumna 1), obliczanie odchylenia empirycznego estymaty G'' obliczanej **sposobem drugim** (wiersza 2) prowadzi się do wykorzystania wzoru:

$$s_m(G''_m) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^K (G_{k,m} - G''_m)^2}{K \cdot (K-1)}} \quad (19)$$

Wyniki symulacji w odniesieniu do odchyłeń empirycznych przedstawiono w kolumnie 3 tablicy 3, gdzie podano wartości średniokwadratowe odchyłeń empirycznych z_M symulowanych pomiarów $\mathcal{K}$ obserwacjach.

Zgodnie z koncepcją *Przewo* dn i k_1 obliczone odchylenia empiryczne identyfikuje się z niepewnościami standardowymi typu A.

5. Eksperyment symulacyjny Monte Carlo.

Pomiar pośredni jednoczesny – obliczenia prawdopodobieństwa

Przy przyjętym w eksperymencie założeniu o pominięciu efektów systematycznych wywołanych niedokładnością przyrządów pomiarowych, niepewnością rozszerzoną $U_m(G_m)$ m -tego pomiaru jest iloczyn współczynnika rozszerzenia przez niepewność standardową typu A, czyli przez odchylenie empiryczne $z_m(G_m)$. Współczynnikiem rozszerzenia jest natomiast kwantyl rozkładu Studenta z liczbą stopni swobody $\nu = K - 1$ przy założonym poziomie ufności p ($t_p(\nu)$). Tak więc niepewnością m -tego pomiaru jest:

$$U_m(G_m) = t_p(\nu) \cdot s_m(G_m) \text{ przy czym } G_m = G_p' \text{ lub } G_m = G_m'' \quad (20)$$

Tab. 3. Wyniki eksperymentu MC. Pomiar pośredni **jednoczesny**.

Wartości stałe: $M = 10^5$, $\sigma_G = 0,3 \% \cdot EG$, $\sigma_B = 10 \% \cdot EG$

	1.	2.	3.	4.
Nr wiersza	Sposób obliczeń	Estymata w %EG – wartość średnia arytmetyczna z M pomiarów	Odch. empiryczne w %EG – wartość średniokwadratowa z M pomiarów	Prawdopodobieństwo empiryczne P_e w % dla poziomu ufności $p = 95 \%$
1.	$K = 5, \sigma_U = 0,3 \% \cdot EU$			
2.	Pierwszy (kolumnami)	100,001	0,278	98,5
3.	Drugi (wierszami)	100,000	0,134	95,0
4.	$K = 100, \sigma_U = 0,3 \% \cdot EU$			
5.	Pierwszy (kolumnami)	100,003	0,0753	100,0
6.	Drugi (wierszami)	100,000	0,0300	95,2
7.	$K = 5, \sigma_U = 10 \% \cdot EU$			
8.	Pierwszy (kolumnami)	99,200	0,278	44,4
9.	Drugi (wierszami)	100,000	0,134	95,0
10.	$K = 100, \sigma_U = 10 \% \cdot EU$			
11.	Pierwszy (kolumnami)	99,009	0,0756	0,0
12.	Drugi (wierszami)	100,000	0,0300	95,1

Ponieważ w eksperymencie symulacyjnym znana jest wartość oczekiwana EG (wartość prawdziwa!) mierzonej wielkości, więc dla M symulowanych pomiarów można obliczyć prawdopodobieństwo empiryczne P_e tego, że EG mieści się w przedziale ufności:

$$\begin{aligned}
 P_e \{EG \in [G_m - U_m(G_m), G_m + U_m(G_m)]\} = \\
 = \frac{1}{M} \cdot \sum_{m=1}^M \begin{cases} 1 & \text{gdy } EG \in [G_m - U_m(G_m), G_m + U_m(G_m)] \\ 0 & \text{gdy przeciwnie} \end{cases} \quad (21)
 \end{aligned}$$

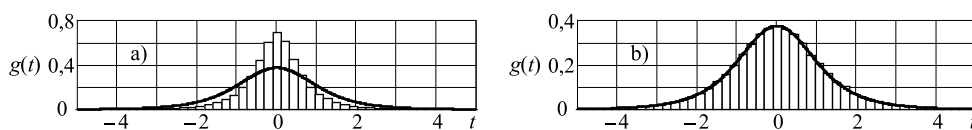
Wyniki obliczeń prawdopodobieństwa P_e przedstawiono w kolumnie 4 tablicy 3.

6. Pomiar pośredni jednoczesny – dyskusja wyników eksperymentu symulacyjnego

Wyniki eksperymentu symulacyjnego, zaprezentowane w tablicy 3, jednoznacznie wskazują, że EG (średnia arytmetyczna estymat z $M = 10^5$ symulowanych pomiarów) jest, praktycznie biorąc, równa założonej wartości oczekiwanej EG , czyli wartości prawdziwej,

- estymaty mezurandu – kol. 2 tablicy 3 – wartość średnia arytmetyczna estymat z $M = 10^5$ symulowanych pomiarów jest, praktycznie biorąc, równa założonej wartości oczekiwanej EG , czyli wartości prawdziwej,
- odchylenia empirycznego estymaty mezurandu – kol. 3 tablicy 3 – wartość średniokwadratowa odchylenia empirycznego z $M = 10^5$ symulowanych pomiarów jest, praktycznie biorąc, równa wartości teoretycznej, równej $\sigma_G/\sqrt{K}$, tzn. $0,134 \% \cdot EG$ dla $K = 5$ i $0,03 \% \cdot EG$ dla $K = 100$,
- prawdopodobieństwa tego, że wartość EG mieści się w przedziale niepewności rozszerzonej – kol. 4 tablicy 3 – prawdopodobieństwo empiryczne P_e jest, praktycznie biorąc, równe założonemu poziomowi ufności.

O przewadze drugiego sposobu obliczeń (*wierszami*) nad pierwszym (*kolumnami*) świadczą też wyniki testu zgodności histogramu empirycznej zmiennej t -Studenta z wykresem tej zmiennej dla tej samej liczby stopni swobody pokazane w [4] i na rys. 2.



Rys. 2. Histogramy gęstości prawdopodobieństwa $g(t)$ empirycznej zmiennej t -Studenta na tle wykresu statystyki Studenta dla liczby stopni swobody 4 i dla estymat obliczonych:

- a) – P_e (kolumnami), b) – P_e (wierszami)
dla $K = 5$, $\sigma_G = 0,3 \% \cdot EG$, $\sigma_B = 10 \% \cdot EG$ oraz $\sigma_U = 0,3 \% \cdot EU$

7. Pomiar pośredni niejednoczesny – eksperyment symulacyjny

W toku dyskusji na konferencjach naukowych, na których autor prezentował przedstawianą tu problematykę, pojawiło się pytanie, jak kształtują się wyniki obliczeń omawianymi dwoma sposobami, gdy pomiar pośredni jest $ni\acute{e}j\acute{e}n\acute{c}y\acute{e}$.

Odpowiedzi dostarcza znowu eksperyment symulacyjny, zrealizowany za pomocą aplikacji Mathcad 14. Eksperyment ten różni się od opisanego w podrozdz. 3

eksperymentu symulującego pomiar pośredni jednoczesny tym, że macierz wartości prądu o elementach $I_{k,m}$ oblicza się ze wzoru:

$$I_{k,m} = U_{k,m+1} \cdot \sqrt{G_{k,m}^2 + B_{k,m}^2} \quad (22)$$

– zamiast ze wzoru (11), tzn. wartość prądu o numerze m uzależnia się od wartości napięcia o numerze $m + 1$. Wartości prądu nie są więc skorelowane z wartościami napięcia.

Podobnie macierz wartości przesunięcia fazowego o elementach $\varphi_{k,m}$ oblicza się ze wzoru:

$$\varphi_{k,m} = \arctg \frac{B_{k,m+1}}{G_{k,m+1}} \quad (23)$$

dzięki czemu przesunięcie fazowe nie jest skorelowane z wartościami konduktancji i susceptancji. Nie są zatem ze sobą skorelowane wartości $I_{k,m}$, $U_{k,m}$ i $\varphi_{k,m}$.

Tu uwaga: Wiarygodność symulacji Monte Carlo zasadza się na założeniu, że generowane liczby pseudolosowe mają nie tylko zadany rozkład prawdopodobieństwa, ale też, że kolejne ich realizacje są od siebie statystycznie niezależne. Według wiedzy autora generatory liczb pseudolosowych aplikacji Mathcad 14 te warunki w wysokim stopniu spełniają.

Wyniki eksperymentu symulacyjnego, dotyczące pomiaru pośredniego niejednoczesnego zestawiono w tablicy 4. Wskazują one na niewielką przewagę sposobu

Tab. 4. Wyniki eksperymentu MC. Pomiar pośredni ni

Wartości stałe: $M = 10^5$, $\sigma_G = 0,3 \% \cdot EG$, $\sigma_B = 10 \% \cdot EG$

	1.	2.	3.	4.
Nr wiersza	Sposób obliczeń	Estymata w %EG – wartość średnia arytmetyczna z M pomiarów	Odch. empiryczne w %EG – wartość średniokwadratowa z M pomiarów	Prawdopodobieństwo empiryczne P_e w % dla poziomu ufności $p = 95 \%$
1.	$K = 5, \sigma_U = 0,3 \% \cdot EU$			
2.	Pierwszy (kolumnami)	100,005	0,433	93,6
3.	D rugi (ierszami)	000, 007	0, 000	06, 0
4.	$K = 100, \sigma_U = 0,3 \% \cdot EU$			
5.	Pierwszy (kolumnami)	100,004	0,0876	87,9
6.	D rugi (ierszami)	000, 006	0, 0000	00, 0
7.	$K = 5, \sigma_U = 10 \% \cdot EU$			
8.	Pierwszy (kolumnami)	100,21	6,40	95,0
9.	D rugi (ierszami)	000, 00	6, 00	00, 0
10.	$K = 100, \sigma_U = 10 \% \cdot EU$			
11.	Pierwszy (kolumnami)	100,01	1,42	95,1
12.	D rugi (ierszami)	000, 00	0, 06	00, 0

pierwszego (*kolumnami*), szczególnie przy dużej wartości ($\sigma_U = 10 \% \cdot EU$) losowego rozrzutu napięcia zasilającego układ pomiarowy – zwłaszcza przy dużej liczbie $K = 100$ obserwacji – wiersz 11 tablicy 4.

Ostatni wniosek skłonił do rozszerzenia badań na jeszcze większe liczby obserwacji: $K = 500$ i $K = 1000$. Ze względu na ograniczone zasoby pamięci, jakimi dysponuje aplikacja Mathcad 14 przy tworzeniu macierzy, liczbę symulowanych pomiarów należało ograniczyć do $M = 10^4$. Wyniki zestawiono w tablicy 5.

Tab. 5. Wyniki eksperymentu MC. Pomiar pośredni $\bar{P}_c$ o dużej liczbie K obserwacji. Wartości stałe: $M = 10^4$, $\sigma_G = 0,3 \% \cdot EG$, $\sigma_B = 10 \% \cdot EG$, $\sigma_U = 10 \% \cdot EU$

	1.	2.	3.	4.
Nr wiersza	Sposób obliczeń	Estymata w %EG – wartość średnia arytmetyczna z M pomiarów	Odch. empiryczne w %EG – wartość średniokwadratowa z M pomiarów	Prawdopodobieństwo empiryczne P_c w % dla poziomu ufności $p = 95 \%$
1.	$K = 500$			
2.	Pierwszy (<i>kolumnami</i>)	100,006	0,637	94,9
3.	D rugi (ierszami)	100,007	0,637	94,9
4.	$K = 1000$			
5.	Pierwszy (<i>kolumnami</i>)	100,005	0,450	95,4
6.	D rugi (ierszami)	100,007	0,460	95,4

Potwierdzają one wcześniejszy wniosek, że **przewaga pomiaru pierwszego (*kolumnami*)** objawia się, praktycznie biorąc, **tylko przy dużej liczbie obserwacji**. Wykonywanie liczby obserwacji większej niż kilkadziesiąt nie jest na ogół realne. Praktycznie jest możliwe wtedy, gdy pomiary są automatycznie powtarzane ze znaczną częstotliwością. Taka możliwość występuje w szczególnych przypadkach, ale wtedy zachodzi obawa skorelowania kolejnych wyników i tzw. *efektywna liczba obserwacji* zmniejsza się – patrz rozdział autorstwa A. Zięby.

8. Podsumowanie i wnioski

Inspirację dla podjęcia przedstawionej problematyki stanowiła wiedza pozyskana od metrologów starszej daty, którzy nie dysponując tak potężnym narzędziem, jakim jest symulacja za pomocą komputera, na podstawie swojego doświadczenia i intuicji wskazywali, że pomiar pośredni powinien być jednoczesny i opracowywany *wierszami*. Wśród nich autor pragnie wymienić swoich Nauczycieli: zastępcę profesora mgr inż. Zygmunta Paryskiego i prof. Artura Metala.

Wyniki zaprezentowanych eksperymentów symulacyjnych można wypunktować następująco:

- 1) **Pomiar pośredni** $\bar{P}_c$ w przedstawionych eksperymentach symulacyjnych wykazał bezwzględną wyższość nad pomiarem pośrednim niejednocze-

snym, zwłaszcza wtedy, gdy obliczenia wykonuje się **po wierszami (wierszami)**. Na tę wyższość wskazują wiersze 3, 6, 9 i 12 tablicy 3, z których wynika, że takie połączenie sposobu pomiaru i obliczeń prowadzi do poprawnych, w sensie statystycznym, wartości estymaty mezurandu i wartości niepewności standardowej typu A, jak to szczegółowo omówiono w podrozdziale 6. Z zestawień wartości średniokwadratowych odchyłeń empirycznych wg tablicy 3, kolumna 3, a mianowicie wiersza 3 z wierszem 2, w. 6 z w. 5, w. 9 z w. 8 i w. 12 z w. 11 wynika, że w eksperymencie symulacyjnym przy obliczaniu *wierszami* otrzymano ok. 2,5-krotnie mniejsze wartości średniokwadratowe odchylenia empirycznego, niż przy obliczaniu *kolumnami*.

- 2) **Konkluzja: pomiar pośredni jest niecelowny i niekorzystny w stosunku do pomiaru bezpośredniego (wierszami)**. Ta dokładność w sensie statystycznym nie oznacza jednak, że w każdym konkretnym pomiarze wartości estymaty mezurandu i odchylenia standardowego są dokładne, bo estymaty mezurandu podlegają statystyce Studenta, a kwadraty odchyłeń empirycznych – rozkładowi gamma.
- 3) **Drugi sposób obliczeń (wierszami)** wydaje się w niewielkim stopniu mniej poprawny niż pomiar pośrednim niż jest niecelowny, ale ma istotną przewagę nad sposobem pierwszym (*kolumnami*), zwłaszcza przy dużej liczbie zmiennych wejściowych: posługuje się znacznie prostszymi wyrażeniami matematycznymi – np. (15) zamiast (13) i (14) oraz (19) zamiast (16), (17) i (18). Nie wymaga też analizy korelacji między zmiennymi wejściowymi. W efekcie jest mniej podatny na omyłki w obliczeniach – mniej podatny na błędy grube.
- 4) **Pierwszy sposób obliczeń (kolumnami)** wykazuje, pod względem dokładności w sensie statystycznym, niezbyt wielką przewagę nad sposobem drugim (*wierszami*) przy pomiarze pośrednim niż jest niecelowny – wiersze 8 i 11 tablicy 4 – zwłaszcza przy użyciu (raczej nierealnej w praktyce) **liczby obserwacji** – wiersz 11 tablicy 4 i wiersze 2 i 5 tablicy 5.
- 5) **Pomiar pośredni jest niecelowny i niekorzystny od pomiaru pośredniego niejednoczesnego**. Wartości średniokwadratowe odchyłeń empirycznych w kolumnie 3 tablicy 3 są kilka, a nawet kilkadziesiąt razy mniejsze od odpowiednich wartości w kol. 3 tablicy 4.

Należy jednak też rozróżniać omawiane sposoby obliczeń w aspekcie definicji mezurandu:

- **Pierwszy sposób (kolumnami)** daje wartość wyjściową – **funkcję wartości średnich wielkości wejściowych**,
- **Drugi sposób (wierszami)** daje **wartość średnią funkcji**.

Mogą to być definicje różnych wielkości. Np. w przypadku pomiaru mocy poprzez pomiar napięcia, prądu i przesunięcia fazowego w pierwszym przypadku jest to moc wartości średnich, a w drugim moc średnia. Są to różne moce, a każda z nich może mieć sens w innym, konkretnym zagadnieniu pomiarowym.

Tak więc trudno jest sformułować jeden uniwersalny i *jedynie słuszny* algorytm obliczeń. Każde zadanie pomiarowe wymaga wnikliwej analizy i tworzenia algorytmu obliczeń, adekwatnego do fizyko-technicznego sensu mierzonej wielkości.

Należy zauważyć, że przedstawione algorytmy obliczeniowe posługują się wartością średnią arytmetyczną jako estymatorem wartości oczekiwanej. Jest to w pełni poprawne, gdy zmienna losowa ma rozkład normalny. Tymczasem zmienna losowa, która jest nieliniową funkcją innych zmiennych losowych nie ma rozkładu normalnego nawet wtedy, gdy te inne zmienne losowe mają rozkłady normalne.

Ponadto należy mieć na uwadze, że pomiar pośredni niejednoczesny można traktować jako złożenie niezależnych pomiarów wielkości wejściowych. Takie podejście wydaje się bardziej ogólne. To jednak wykracza poza zakres tego rozdziału.

9. Podziękowania

Treści tego rozdziału kształtowały się między innymi w dyskusjach podczas konferencji metrologicznych. Dlatego też autor pragnie podziękować szczególnie aktywnym dyskutantom, a zwłaszcza Pani prof. Annie Domańskiej z Politechniki Poznańskiej i Panom prof. prof. Tadeuszowi Skubisowi z Politechniki Śląskiej i Michałowi Lisowskiemu z Politechniki Wrocławskiej za zainteresowanie się prezentowanymi tu zagadnieniami i istotny wkład w treści przedstawione w tym rozdziale. Szczególne podziękowanie należy się prof. A. Domańskiej, która wykonała żmudną pracę wyszukania w [1] i [2] istotnych fragmentów odnoszących się do pomiarów pośrednich.

Znaczący wkład w udoskonalenie rozdziału pod względem terminologicznym ma Pan dr Paweł Fotowicz z Głównego Urzędu Miar.

Autor pragnie wymienić też Pana Macieja Leśniaka, studenta Wydziału Elektrycznego ZUT, który zainteresował się zagadnieniem podczas wykładu i zwrócił uwagę na to, że przy liczbie obserwacji dążącej do nieskończoności wartości średnie wielkości wejściowych (przy niezbędnych założeniach) dążą do wartości prawdziwych. Zainspirowało to autora do realizacji eksperymentu symulacyjnego przy dużej liczbie obserwacji.

Literatura

- [1] *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*, tłum. Jaworski J. M. Główny Urząd Miar, 1999.
- [2] J. M. Jaworski: *Niedokładność, błąd, niepewność*, dodatek do [1].
- [3] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Supplement 1. Numerical Methods for the Propagation of Distributions*, Joint Committee for Guides in Metrology, 2004.
- [4] S. Kubisa: *Porządek procedur w pomiarze laboratoryjnym. Metoda Monte Carlo*. Metrologia dziś i jutro, pod red. J. Jakubca, Z. Moronia i H. Juniewicza, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2010, s. 23-38.

NIEPEWNOŚĆ POMIARU DLA CIĄGU OBSERWACJI SAMOSKORELOWANYCH

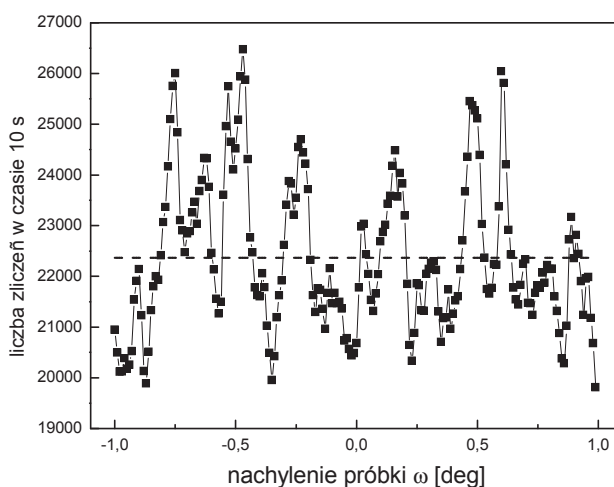
Andrzej Zięba

Akademia Górniczo-Hutnicza

1. Wstęp

Ciąg obserwacji $x_1, \dots, x_n$ jest zwykle rejestrowany w kolejności ich uzyskania. Kolejność ta jest bez znaczenia, jeżeli kolejne obserwacje x_i pozostają statystycznie niezależne od siebie, czyli *nieskorelowane*. Standardowe wzory na opracowanie serii obserwacji (np. [1]) są optymalne przy dodatkowych założeniach *równości* elementów próby i *normalności* rozkładu gęstości prawdopodobieństwa.

Jeżeli prawdopodobieństwo uzyskania wyniku x_i zależy od innych obserwacji, mamy do czynienia z *obserwacją samoskorelowaną* (*autokorelowaną*). Rys. 1 przedstawia rzeczywiste dane samoskorelowane. Na oko wyglądają one inaczej niż dane nieskorelowane („biały szum”); są mniej poszarpane, zaś różnica $x_i - \bar{x}$ mniej często zmienia znak.



Rys. 1. Samoskorelowane dane z dyfraktometru rentgenowskiego: zależność natężenia refleksu 600 korundu (Al_2O_3) od kąta nachylenia próbki [2]. Linia przerywana oznacza średnią arytmetyczną $\bar{x}$ z pokazanych $n = 200$ wartości x_i

Samoskorelowane ciągi obserwacji uzyskiwane są w najróżniejszych eksperymentach. Najczęściej występują wtedy, gdy badany układ będący źródłem danych podlega losowym zakłóceniom i jednocześnie pamięta stan poprzedni. W efekcie mamy do czynienia z pewnym ciągłym procesem stochastycznym $x(t)$ (np. zależność ciśnienia

atmosferycznego od czasu), zaś dyskretny ciąg obserwacji x_i wynika z jego próbkowania w równych odstępach czasu.

Celem pracy jest przedstawienie właściwości statystycznych n -elementowej próby obserwacji samoskorelowanych i metod obliczenia dla niej niepewności typu A.

2. Matematyczne modele danych samoskorelowanych

Samoskorelowane ciągi liczb znane są w literaturze [3 ÷ 5] pod nazwą *szeregów czasowych*. W analogii do szeregów algebraicznych, szeregi czasowe są zdefiniowane za pomocą wzorów rekurencyjnych, wyrażających kolejne liczby x_i przy użyciu wartości poprzednich oraz ciągu liczb nieskorelowanych u_i . Dwa najprostsze przykłady to średnia ruchoma

$$\text{SMA: } x_i = \frac{u_i + u_{i-1} + \dots + u_{i-m}}{m} \quad (1)$$

oraz autoregresyjny szereg czasowy 1. rzędu

$$\text{AR(1): } x_i = a x_{i-1} + u_i \quad (2)$$

z parametrem $0 < a < 1$. (Symbole SMA oraz AR(1) pochodzą od określeń angielskich: *simple moving average* i *autoregressive*). Wzory (1), (2) i podobne umożliwiają łatwą generację liczb samoskorelowanych potrzebnych do obliczeń metodą Monte Carlo (MC).

W pracach autora [6 ÷ 8] sformułowany został pogląd, że opis teoretyczny rozpatrywanej kategorii danych samoskorelowanych jest możliwy przy wykorzystaniu prostszego formalizmu, polegającego na potraktowaniu ciągu obserwacji $x_1, \dots, x_n$ jako realizacji wielowymiarowej zmiennej losowej $X_1, \dots, X_n$. Przy podtrzymaniu założeń o normalności rozkładu i równoważności elementów próby losowej, statystyczne własności liczb x_i są w pełni scharakteryzowane przez wartość oczekiwaną μ oraz odchylenie standardowe σ . Zaś korelacje między X_i i X_j opisują elementy dyskretnej funkcji autokorelacji jako:

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(X_i, X_{i+k})}{\sigma^2} \quad (3)$$

której wskaźnik $|k = i - j|$ nazywamy jest *odstępem*. Zatem, dla wyprowadzenia i zrozumienia przedstawionego w pracy formalizmu, wystarczy elementarny zbiór pojęć statystycznych zestawiony w Dodatku C *Przewodnik*

Dla rzeczywistych danych samoskorelowanych występujące korelacje są prawie zawsze:

- (i) *nieujemne*, wszystkie $\rho_k \geq 0$, co wynika z faktu, że w różnych zjawiskach zwykle stan poprzedni jest podtrzymywany (pogoda dzisiejsza bywa podobna do wczorajszej),
- (ii) *oskórny*, wszystkie elementy ρ_k maleją do zera ze wzrostem odstepu k (w perspektywie wielu dni korelacje parametrów meteorologicznych zanikają).

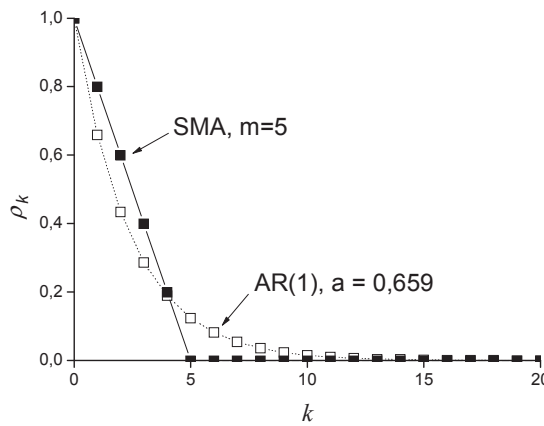
3. Funkcja autokorelacji: znana a priori i estymowana z danych

Funkcję $\{\rho_k\}$ jest znana a priori dla modeli modelowych danych będących szeregami czasowymi generowanymi przez komputer. Dla szeregów czasowych (1) oraz (2) funkcję autokorelacji określają wzory

$$\text{SMA: } \begin{cases} \rho_k = 1 - k / m & \text{dla } k < m \\ \rho_k = 0 & \text{dla } k \geq m \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{AR(1): } \rho_k = a^k \quad (5)$$

których wykresy przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Funkcje autokorelacji dla dwu modeli szeregów czasowych

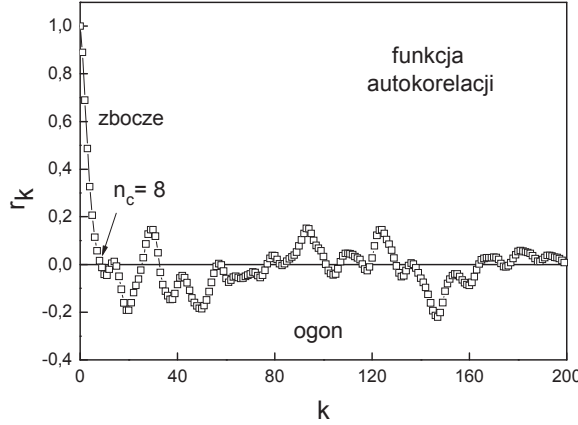
Istnieją sytuacje, gdy funkcja autokorelacji jest znana również dla danych uzyskanych z eksperymentu. Realizacją fizyczną procesu AR(1) jest np. przefiltrowanie szumu termicznego przez układ całkujący RC [9]. W pewnych przypadkach postać funkcji $\{\rho_k\}$ jest znana z dokładnych pomiarów wcześniejszych, dotyczy to np. danych meteorologicznych [10]. Wreszcie, funkcja autokorelacji jest znana, jeżeli dane samokorelowane powstały w wyniku wygładzania pierwotnych danych nieskorelowanych przy pomocy określonego algorytmu (np. obliczania średniej ruchomej (1)).

Najczęściej jednak funkcja autokorelacji musi być wyznaczona na podstawie posiadanych danych. Estymator funkcji autokorelacji $\{r_k\}$ zdefiniowany wzorem:

$$r_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (y_i - \bar{y})(y_{i+k} - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (6)$$

jest najczęściej omawiany w podręcznikach [3], [4] i [5], jak również zaimplementowany w programach do analizy danych. Rys. 3 przedstawia obliczoną przy pomocy wzoru (6) estymatę $\{r_k\}$ dla danych z rys. 1.

W wykresie estymaty można wyróżnić dwie, różne jakościowo części. Dla małych wartości odstepu k mamy opadające *zbo* *częw* którym jest zawarta informacja o występujących korelacjach. Reszta to fluktuujący *o go*. *ęgo* takie czy inne kształty robią wrażenie quasi-ciągłych funkcji, jednakże jest to obraz szumu, tyle że samoskorelowanego. Odchylenie standardowe tych fluktuacji jest większe niż $n^{-1/2}$ [4], co tłumaczy dużą amplitudę fluktuacji w ogonie $\{r_k\}$.



Rys. 3. Estymata funkcji autokorelacji dla danych z rys. 1

4. Efektywna liczba obserwacji

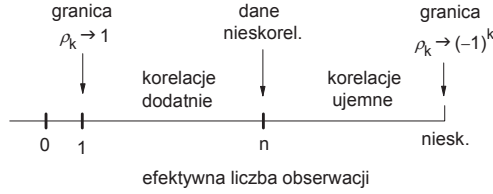
Dla opracowania rzeczywistych danych skorelowanych wprowadzono, w co najmniej dziesięciu pracach (wyszczególnionych w [8]) i niezależnie od siebie, parametr statystyczny nazwany *efektywną liczbą obserwacji* n_{eff} . Umożliwia on zwięzły zapis wzorów opisujących niepewność pojedynczego pomiaru i średniej (patrz pkt. 5), a ponadto pomaga w intuicyjnym zrozumieniu właściwości obserwacji skorelowanych. Przy znajomości funkcji autokorelacji $\{\rho_k\}$ wartość n_{eff} definiuje wzór:

$$n_{\text{eff}} = \frac{n}{1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} \rho_k} \quad (7)$$

Rys. 4 przedstawia możliwe wartości efektywnej liczby obserwacji dla ustalonej liczbeności próby n . Ponieważ korelacje są na ogół dodatnie, to zwykle $n_{\text{eff}} < n$.

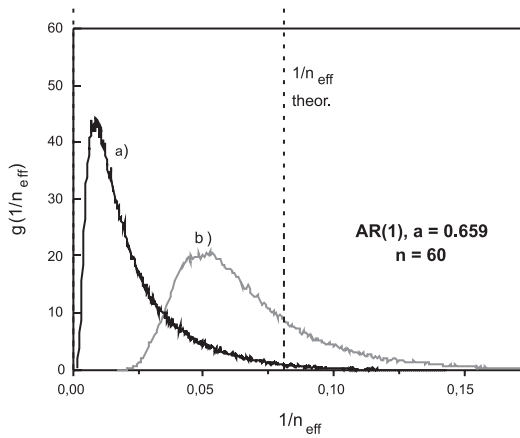
Jeżeli znamy tylko estymatę $\{r_k\}$ funkcji autokorelacji, powstaje zagadnienie, jak na jej podstawie estymować efektywną liczbę obserwacji? O ile n_{eff} obliczone na podstawie funkcji $\{\rho_k\}$ jest ustalonym parametrem, to z funkcji $\{r_k\}$ możemy otrzymać tylko estymator efektywnej liczby obserwacji $\hat{n}_{\text{eff}}$ będący, jak każdy estymator, zmienną losową o pewnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa, wartości oczekiwanej i wariancji.

Narzucający się estymator efektywnej liczby obserwacji polega na użyciu wzoru (7), w którym funkcję $\{\rho_k\}$ zastępujemy przez $\{r_k\}$. Symulacja metodą MC pokazuje



Rys. 4. Przedstawienie właściwości n_{eff} na osi liczbowej. Granica liczb w pełni skorelowanych dodatnio oraz ujemnie otrzymuje się dla wartości ρ_k dążących do wartości równych, odpowiednio, 1 oraz $(-1)^k$

(rys. 5, krzywa a), że uzyskany w ten sposób estymator ma bardzo niekorzystne właściwości: wartość $1/\hat{n}_{\text{eff}}$ jest mocno zaniżona w stosunku do wartości teoretycznej, co prowadzi (wzór (11)) do zaniżenia oszacowania niepewności pomiaru.



Rys. 5. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa dla różnych estymatorów odwrotności efektywnej liczby obserwacji: (a) sumowania wszystkich elementów r_k , b) wzór (7) z wartością n_c z metody FTZ. Symulacje MC wykonano dla modelu AR(1), $a = 0,659$, $n = 60$. Linia przerywana pokazuje wartość teoretyczną $1/n_{\text{eff}} = 1/12,33$

Przyczyną tego zjawiska jest wpływ ogona funkcji autokorelacji. Nieformalnym remedium jest arbitralne ograniczenie sumowania we wzorze (7) do tylko początkowych elementów estymaty $\{r_k\}$ [11]. Aby procedurę tą uczynić jednoznaczną, zaproponowano w [7] i [8] wzór:

$$\hat{n}_{\text{eff}} = \frac{n}{1 + 2 \sum_{k=1}^{n_c} \left(1 - \frac{k}{n}\right) r_k} \quad (8)$$

w którym graniczny odstęp n_c jest określony przez ostatni niezerowy element estymaty $\{r_k\}$ przed jej pierwszym przejściem przez zero (metoda FTZ – od ang. *first t trans - it thro ugh ze ro*). Przykładowo, dla funkcji pokazanej na rys. 3 otrzymujemy $n_c = 8$.

Symulacyjne badanie MC pokazuje, że zastosowanie takiego podejścia daje radykalne zmniejszenie ujemnego obciążenia estymatora (rys. 5, krzywa b).

Dalsze zmniejszenie obciążenia estymatora uzyskuje się przy użyciu wzoru:

$$n_{\text{eff}}^+ = \frac{n - 2n_c - 1 + n_c(n_c + 1)/n}{1 + 2 \sum_{k=1}^{n_c} r_k} + 1 \quad (9)$$

wynikającego z użycia nowego estymatora efektywnej liczby obserwacji [12].

5. Średnia arytmetyczna jako wynik pomiaru powtarzanego

Średnia arytmetyczna jest najbardziej efektywnym przybliżeniem wartości oczekiwanej również dla przypadku, gdy elementy x_i próby losowej są wzajemnie skorelowane. Twierdzenie to można wywieść z metody najmniejszych kwadratów uogólnionej na przypadek skorelowanych danych wejściowych, przy czym dopasowaną funkcją jest funkcja stała. Brak wpływu korelacji na estymator wartości oczekiwanej można heurystycznie powiązać z faktem, że (i) średnia jest sumą zmiennych losowych X_i podzieloną przez n , oraz (ii) wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych jest sumą wartości oczekiwanych, tak dla zmiennych niezależnych jak i skorelowanych.

6. Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru i średniej

Przedstawiona wyżej własność wartości oczekiwanej nie dotyczy wariancji. Wariancja sumy zmiennych losowych jest sumą wariancji poszczególnych składników sumy plus dodatkowe wyrazy zależne od współczynników korelacji między składnikami. Zatem prawidłowe wzory na estymatory wariancji i wariancji średniej muszą zależeć od elementów ρ_k funkcji autokorelacji.

W pracach [6] i [8] przedstawiono wyprowadzenie wzoru na nieobciążony estymator wariancji s_a^2 dla zmiennych samoskorelowanych¹. Poszukiwania literaturowe wykazały, że został on opublikowany bez wyprowadzenia przez Bayleya i Hammersleya [13], a następnie zapomniany. Wygodnie jest zapisać go w postaci wzoru:

$$s_a^2 = \frac{n_{\text{eff}}(n-1)}{n(n_{\text{eff}}-1)} s^2, \quad \text{gdzie} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (10)$$

jest „zwykłym” estymatorem wariancji. Ze wzrostem n i n_{eff} czynnik $\{n_{\text{eff}}(n-1)/[n(n_{\text{eff}}-1)]\}^{1/2}$ dąży do jedności, zatem zachodzi $s_a^2 \cong s^2$, ale dla próby o małej liczebności wzór (10) zapobiega zaniżeniu estymatu wariancji i odchylenia standardowego $s_a = \sqrt{s_a^2}$.

Dla obserwacji niezależnych zmniejszenie odchylenia standardowego średniej $s(\bar{x})$ w stosunku do odchylenia standardowego s pomiaru o czynnik $n^{1/2}$ spowodowa-

¹ Indeks a (od: *autocorrelated*) został wprowadzony, by odróżnić wprowadzone estymatory s_a^2 oraz $s_a^2(\bar{x})$ od dobrze znanych estymatorów s^2 i $s^2(\bar{x})$.

wane jest częściową kompensacją błędów o przeciwnych znakach. Dla zmiennych dodatnio skorelowanych liczba zmian znaku staje się mniejsza (rys. 1), zatem kompensacja błędu przypadkowego, wynikająca z częściowego znoszenia się przyczynków dodatnich i ujemnych, staje się mniej skuteczna. W rezultacie, w związku między niepewnościami pojedynczego pomiaru i średniej, zamiast n występuje mniejsza od niej efektywna liczba obserwacji, zatem:

$$s_a(\bar{x}) = \frac{s_a}{\sqrt{n_{\text{eff}}}} \quad (11)$$

W połączeniu z wzorem (10) niepewność pomiaru dla serii danych samoskorelowanych, utożsamianą z $s_a(\bar{x})$, zapisać można jako:

$$u(x) \equiv s_a(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n_{\text{eff}} - 1)}} \quad (12)$$

Reasumując: w przypadku danych samokorelowanych możemy nadal wynik pomiaru utożsamiać ze średnią, natomiast do obliczania niepewności stosować należy wprowadzone wyżej wzory (10) ÷ (12).

Dokładność statystycznej oceny niepewności nie jest zbyt duża i zależy od parametru nazwanego liczbą stopni swobody $\nu = n - 1$. Dla danych samoskorelowanych można wprowadzić podobny parametr nazwany *efektywną liczbą stopni swobody*. Do celów praktycznych wystarczy korzystać z wzoru przybliżonego [7, 8], zgodnie z którym:

$$\nu_{\text{eff}} \cong \frac{n}{1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k^2} - 1 \quad (13)$$

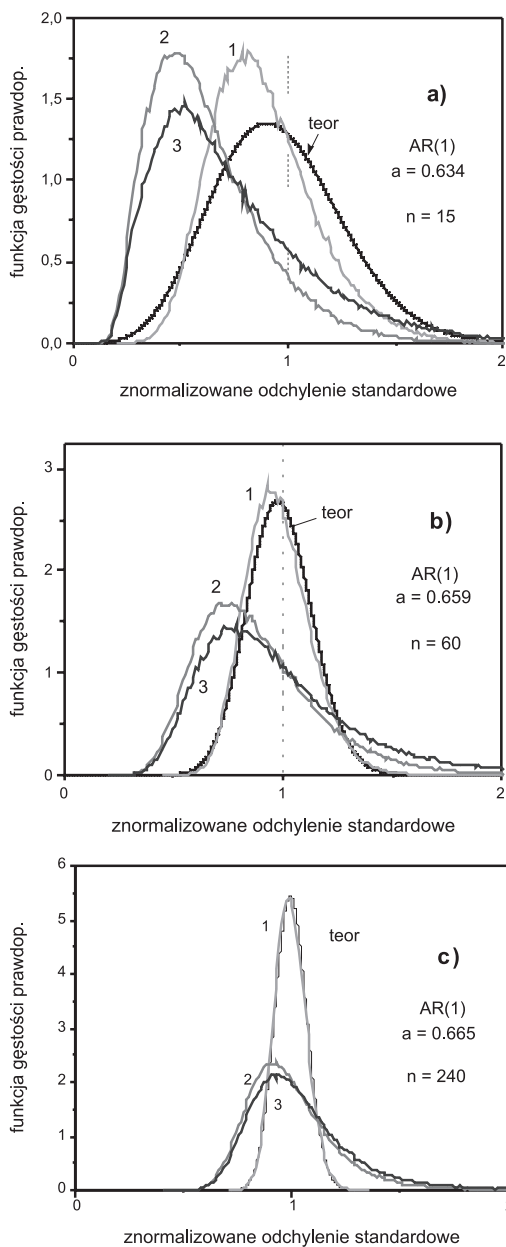
Wprowadzenie ν_{eff} umożliwia zapisanie wzoru na względną dyspersję estymatorów odchylenia standardowego w postaci:

$$\frac{u(s_a)}{s_a} = \frac{u(s_a(\bar{x}))}{s_a(\bar{x})} \cong \frac{1}{\sqrt{2\nu_{\text{eff}}}} \quad (14)$$

W granicy obserwacji niezależnych ($\rho_k = 0$ dla $k \geq 1$) otrzymuje się znany wzór $u(s)/s = [2(n - 1)]^{-1/2}$.

Przedstawiony formalizm analityczny (wzory (10) ÷ (14)) może być stosowany dla dowolnej liczebności próby i każdej funkcji autokorelacji w przypadku, gdy ta ostatnia jest znana. Gdy dysponujemy tylko estymatą $\{r_k\}$, to mamy dwa ograniczenia. Wyrażona wzorami (8) i (9) metoda estymowania efektywnej liczby obserwacji wymaga założenia, że elementy rzeczywistej funkcji autokorelacji są nieujemne i stają się praktycznie równe zeru dla $k < n$. Ponadto, rozrzut estymatora $\hat{n}_{\text{eff}}$ jest źródłem dodatkowego rozrzutu estymatorów odchylenia standardowego.

Ilościową informację o własnościach estymatorów odchylenia standardowego dla przypadku, gdy funkcja autokorelacji estymowana jest z danych, można uzyskać przy pomocy metody Monte Carlo. W pracach [7] i [12] przeprowadzono symulację



Rys. 6. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa dla estymatorów znormalizowanego odchylenia standardowego dla modelu AR(1) i podanych trzech wielkości próby losowej. Krzywe 1, 2 oraz 3 pochodzą z symulacji MC i dotyczą, odpowiednio, s_a / σ , $s_a(\bar{x}) / \sigma(\bar{x})$ oraz $s_a^+(\bar{x}) / \sigma(\bar{x})$. Krzywe teoretyczne „teor” określa wzór (15) z $\nu \equiv \nu_{\text{eff}}$

dla modelu AR(1) i trzech licznosci próby losowej: $n = 15, 60$ i 240 , odpowiadających teoretycznym wartościom efektywnej liczby obserwacji $n_{\text{eff}} = 3,36, 12,33$ i $48,32$. Rys. 6 przedstawia uzyskane funkcje gęstości prawdopodobieństwa dla trzech estymatorów względnego odchylenia standardowego:

krzywa 1 – s_a / σ , gdzie do obliczenia s_a użyto kombinacji wzorów (10) i (8),
 krzywa 2 – $s_a(\bar{x}) / \sigma(\bar{x})$, gdzie $s_a(\bar{x})$ obliczano przy pomocy wzorów (11) i (8),
 krzywa 3 – $s_a^+(\bar{x}) / \sigma(\bar{x})$, gdzie $s_a^+(\bar{x})$ został obliczony z wzorów (11) i (9), czyli z wykorzystaniem nowego estymatora $\hat{n}_{\text{eff}}^+$ o obniżonym obciążeniu.

Dla obserwacji niezależnych znormalizowane odchylenie standardowe $z = s / \sigma$ podlega funkcji rozkładu prawdopodobieństwa:

$$g(z) = \frac{2^{1-\nu/2} \nu^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} z^{\nu-1} \exp(-\nu z^2 / 2) \quad (15)$$

wynikającej z rozkładu chi-kwadrat. Wzór (15) zastosowano dla obserwacji samoskorelowanych, przy czym za zmienną ν podstawiono teoretyczne wartości efektywnej (wypadkowej) liczby stopni swobody ν_{eff} dla badanych modeli (równe, odpowiednio, 5,4, 22,7 i 91,8). Obliczone krzywe teoretyczne pokazano na rys. 6.

Uzyskane metodą MC funkcje gęstości prawdopodobieństwa dla znormalizowanego odchylenia standardowego (krzywe 1 na rys. 6) wykazują dobrą zgodność z krzywymi teoretycznymi, zwłaszcza wtedy, gdy liczebność próby jest duża. Jest tak dlatego, że rozrzut estymatora $\hat{n}_{\text{eff}}$ ma niewielki wpływ na rozrzut s_a , gdyż $\hat{n}_{\text{eff}}$ wchodzi do wzoru (10) poprzez bliski jedności czynnik $\{n_{\text{eff}}(n-1)/[n(n_{\text{eff}}-1)]\}^{1/2}$. Dobra zgodność dowodzi, że efektywna (wypadkowa) liczba stopni swobody ν_{eff} jest parametrem dobrze opisującym rozrzut estymatorów wariancji i odchylenia standardowego.

Wpływ losowego charakteru estymatorów efektywnej liczby obserwacji $\hat{n}_{\text{eff}}$ jest wyraźny dla odchylenia standardowego średniej (czyli niepewności pomiaru). Efektem jest zaniżenie wartości oczekiwanej tego estymatora (szczególnie dla małej liczebności próby, rys. 6a, b) i powiększony rozrzut. Jednak, biorąc pod uwagę fakt, że niepewność pomiaru znamy w ogólności z niewielką dokładnością, przedstawiony formalizm może być stosowany w praktyce.

7. Konkluzje

Rezultatem pracy jest przedstawienie formalizmu, który rozszerza zwykłą metodę obliczania niepewności standardowej typu A na przypadek danych samoskorelowanych. Formalizm ten opiera się na istniejących rezultatach teoretycznych, w większości mało znanych, uzupełnionych przez nowe koncepcje i przetestowaniu całości formalizmu przy użyciu modelowania Monte Carlo.

Bezpośrednim przedłużeniem pracy, doprowadzonej do zagadnienia niepewności standardowej, będzie zbadanie zagadnienia szacowania niepewności rozszerzonej. Inne możliwości zastosowań przedstawionej metodologii to testy statystyczne dla danych samoskorelowanych, stacjonarne procesy stochastyczne z nałożonym trendem czy wreszcie niestacjonarne procesy stochastyczne.

Literatura

- [1] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO 1995. Tłumaczenie polskie: *Wyrażanie Niepewności pomiaru*. Przewodnik. Główny Urząd Miar, 1999.
- [2] A. Zięba: *Niepewność pomiaru obserwacji skorelowanych*. VII Sympozjum nt. Niepewności pomiarów i XXI Seminarium Sekcji Podstaw Metrologii KMiAN PAN, Świnoujście, 11 – 15 luty 2008.
- [3] G. E. P. Box, G. M. Jenkins: *Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie*. PWN, Warszawa 1983 (Nowsze wydanie z rozszerzonym zespołem autorów: G. E. P. Box, G. M. Jenkins, G. C. Reinse. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 1994, Prentice Hall 1994).
- [4] M. B. Priestley: *Spectral Analysis and Time Series*. Elsevier, 1981.
- [5] P. J. Brockwell, R. A. Davis: *Time series: theory and methods* 2nd ed. Springer, New York, 1991.
- [6] A. Zięba: *Niepewność wartości średniej serii obserwacji skorelowanych*. Podstawowe Problemy Metrologii PPM'08, Sucha Beskidzka 11 – 14 maj 2008. Materiały konferencji wydane przez Komisję Metrologii Oddziału PAN w Katowicach.
- [7] A. Zięba, P. Ramza: *Niepewność wartości średniej serii obserwacji skorelowanych (II)*. Podstawowe Problemy Metrologii PPM'09, Sucha Beskidzka 10 – 13 maj 2009. Materiały konferencji wydane przez Komisję Metrologii Oddziału PAN w Katowicach.
- [8] A. Zięba: *Effective number of observations and unbiased estimators of variance for autocorrelated data – an overview*. Metrology and Measurement Systems, 2010, vol. 17, 3-16.
- [9] T. J. Witt: *Using the autocorrelation function to characterize time series of voltage measurements*. Metrologia, 2007, vol. 44, pp. 201-209.
- [10] C. E. Leith: *The standard error of time-averaged estimates of climatic means*. J. Appl. Meteorol., 1973, vol. 12, 1066-1069.
- [11] M. Dorozhovets, Z. L. Warsza: *Udoskonalenie metod wyznaczania niepewności wyniku pomiaru w praktyce*. Przegląd Elektrotechniczny, 2007, vol. 83, 1-13.
- [12] A. Zięba, P. Ramza: manuskrypt wysłany do Statistics and Computation.
- [13] G. V. Bayley, G. M. Hammersley: *The "Effective" Number of Independent Observations in an Autocorrelated Time-Series*. J. R. Stat. Soc. Suppl., 1946, 8, 184-197.